

A note on the relation between book value and market value of firms

Inka Gläser*and Andreas Löffler†

- We were not able to translate the paper in English due to time constraints.
Therefore the paper is in German, but (in case) we will present it in English. -

*. Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Königsworther Platz 1, 3016 Hannover, Universität Hannover, IG@wacc.de.

†. (presents the paper) Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Königsworther Platz 1, 3016 Hannover, Universität Hannover, AL@wacc.de

A note on the relation between book value and market value of firms

Abstract

From the empirical literature it is well known that the book value of a company has an important impact on the market value of the firm. If we simply plug this empirical relation into the existing theories on market valuation, arbitrage opportunities or irrational behavior of investors would result.

Our aim is to present a theoretical (discounted cash flow) model that incorporates both the market as well as the book value of a company. It turns out that, given a particular investment policy, it can indeed be *proven* that both values are highly correlated. If the cash flows are normally distributed however, the book-to-market ratio has a distribution with no expectation. Therefore, our model cannot be used as a foundation of the book-to-market ratio multiple that is used in valuation by practitioners.

keywords: book-to-market ratio, discounted cash flow,

JEL-class.: G 31, D46

- We were not able to translate the paper in English due to time constraints. Therefore the paper is in German, but (in case) we will present it in English. -

1 Einführung

In der Literatur zur Unternehmensbewertung kann man, etwas vereinfacht, zwei Herangehensweisen unterscheiden. Eine Herangehensweise, die wir "theoretisch orientiert" nennen wollen, verfolgt das Ziel, Aussagen zum Marktwert von Unternehmen aus klar definierten Annahmen und mit formalen Methoden herzuleiten. Ergebnis dieser Herangehensweise sind beispielsweise Sätze zum Zusammenhang von Kapitalkosten eines verschuldeten und eines unverschuldeten Unternehmens¹, die Theorie des Gordon-Wachstums-Modells und viele andere Arbeiten. Ob die in diesen Theorien unterstellten Voraussetzungen in der Realität auch tatsächlich gegeben sind, wird dabei in der Regel nicht thematisiert.²

Bei der anderen Herangehensweise in der Unternehmensbewertung geht es darum, in der Wirklichkeit beobachtbare Beziehungen zwischen wichtigen ökonomischen Kennzahlen eines Unternehmens und dessen Marktwert zu entdecken. Wir wollen diese Herangehensweise "empirisch orientiert" nennen. Hier wird eine Hypothese zum Zusammenhang einer oder mehrerer Kennzahlen (Umsatz, Investitionsvolumen, Buchwert) und dem Marktwert des Unternehmens aufgestellt und mit statistischen Analysen historischer Datensätze diese Hypothese verworfen oder verifiziert. Der Empiriker interessiert sich bei seinem Vorgehen weniger für logisch beweisbare Zusammenhänge, was aber oft für den Theoretiker ein Problem darstellt: integriert der Theoretiker nämlich eine empirisch gewonnene Tatsache als weitere Annahme (Axiom, Voraussetzung) in eine bestehende Theorie, so können logische Widersprüche entstehen. Wird beispielsweise der Size-Effekt zu einem einfachen DCF-Modell als weiteres Axiom hinzugefügt - hängt also der Marktwert eines Unternehmens nicht mehr nur von dessen Cashflows und den Kapitalkosten, sondern auch von der Unternehmensgröße ab -, so läuft dies auf eine Arbitragegelegenheit hinaus: bei gleichen Cashflows und identischen Kapitalkosten können die DCF-Marktwerte ja nicht

1. Siehe beispielsweise Richter (1998) oder Wallmeier (1999).

2. Siehe beispielsweise sehr kritisch dazu Schildbach (2000).

verschieden sein. Diese Tatsache gilt für viele empirisch beobachtete Effekte: fügt man einem Kapitalmarktmodell eine empirisch gewonnene Erkenntnis als weitere Voraussetzungen hinzu, so führt dies oft zu logischen Widersprüchen.

Uns interessiert in diesem Zusammenhang die Frage, wie empirische Erkenntnisse im Rahmen eines gegebenen Kapitalmarktmodell "theoretisch fundiert" werden können. Darunter wollen wir eine Situation verstehen, bei der das Kapitalmarktmodell um weitere widerspruchsfreie Annahmen so ergänzt wird, dass die empirisch beobachtbare Erkenntnis im Rahmen dieses Modells beweisbar wird.

Zu der empirisch orientierten Herangehensweise gehören auch die Arbeiten, die sich mit dem Einfluss des Buchwertes auf den Marktwert eines Unternehmens beschäftigen. Diese Literatur ist aus einem wichtigen Grund für die Praxis interessant. Wenn es tatsächlich einen stringenten Zusammenhang zwischen Buchwert und Marktwert gibt, dann könnte es auch sinnvoll sein, den Quotienten Marktwert-Buchwert eines Unternehmens als Multiplikator in der Unternehmensbewertung zu verwenden.³ Könnte man die empirische Literatur an dieser Stelle theoretisch fundieren, so würde dies auch bedeuten, dass man eine Ernst zu nehmende Basis für die Multiplikatormethode gewonnen hätte. Gilt doch die Multiplikatormethode, gerade weil sie typischerweise nicht im Rahmen einer Modellanalyse aus präzise formulierten Annahmen hergeleitet (bewiesen) wird, als ein wenig vertrauenswürdiges ad hoc Verfahren.⁴

Die empirische Literatur zum Marktwert-Buchwert-Verhältnis zeigt nun in der Tat, dass der Buchwert und der Marktwert eines Unternehmens eine hohe Korrelation aufweisen. So zeigen beispielsweise Rosenberg, Reid & Lanstein (1985) in einer Untersuchung der Jahre 1980-1984 an der NYSE, dass eine Handelsstrategie mit dem Buchwert-Marktwert-Verhältnis als wesentlichem Entscheidungskriterium zu einem außerordentlichen Gewinn führt. Penman (1995)

3. In der Literatur wird sowohl das Buchwert-Marktwert-Verhältnis, wie auch das Marktwert-Buchwert-Verhältnisses betrachtet. Bei stochastischen Zufallsvariablen spielt es (man denke an die Jensensche Ungleichung) eine Rolle, ob man sich mit der Größe oder ihrem Kehrwert auseinander setzt. In dieser Arbeit werden wir aus rein praktischen Überlegungen das Marktwert-Buchwert-Verhältnis untersuchen.

4. Siehe dazu etwa Ballwieser (1991), Damodaran (2001), Löhnert & Böckmann (2001), Coenenberg & Schultze (2002), Beckmann, Meister & Meitner (2003) und Moser & Auge-Dickhut (2003).

findet für den Zeitraum von 1969–1986 für die NYSE und die AMEX bestätigt, dass mittels des Marktwert–Buchwert–Verhältnis Aussagen über die Profitabilität einer Aktie gemacht werden können. Fama & French (1992) und Fama & French (1993) stellen in ihrer Untersuchung für die Jahre 1963–1990 für die NYSE, die AMEX sowie die NASDAQ einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem Buchwert–Marktwert–Verhältnis und der durchschnittlichen Aktienrendite fest. Harris & Marston (1994), Daniel & Titman (1997) und Wallmeier (2000) bestätigen mit ihren Untersuchungen das empirische Ergebnis von Fama & French (1993). Insgesamt kann man also davon sprechen, dass die empirische Literatur eine starke Korrelation von Buchwert und Marktwert eines Unternehmens nachweist. Diese Korrelation wird auch Marktwert–Buchwert–Effekt genannt. Wie kann dieser Effekt in ein einfaches Discounted Cashflow–Modell so integriert werden, dass sich kein Widerspruch zu den Modellannahmen (insbesondere der Arbitragefreiheit) herstellt?

In der Diskussion der empirischen Ergebnisse werden für die Korrelation von Buchwert und Marktwert zwei Erklärungshypothesen angeführt. Die erste argumentiert im Rahmen der neoklassischen Finanzierungstheorie. Unter den Annahmen von Arbitragefreiheit und rationalem Verhalten der Akteure wird davon ausgegangen, dass der Markt informationseffizient ist. Der Marktwert–Buchwert–Effekt beruht dann auf einem Theoriedefizit⁵: In den bisherigen Gleichgewichtsmodellen gäbe es noch nicht berücksichtigte Risikofaktoren, die mittelbar oder unmittelbar den Marktwert–Buchwert–Effekt auslösen. Erst eine Einbeziehung dieser Faktoren führt zur Beseitigung des beobachtbaren Effekts.

Eine zweite Erklärung für den Marktwert–Buchwert–Effekt soll die Überreaktionshypothese bieten⁶: Hier wird davon ausgegangen, dass sich die Akteure am Markt irrational verhalten. Der Marktwert–Buchwert–Effekt stellt sich als Überreaktion des Marktes aufgrund von Informationsineffizienz dar. Rosenberg et al. (1985) und Wallmeier (2000) beobachten einen starken Marktwert–Buchwert–Effekt und schließen aus ihren Ergebnissen, dass der Markt ineffizient ist. Während Rosenberg et al. (1985) auf eine theoretische Erklärung für diese Schlussfolgerung verzichten⁷, ordnet Wallmeier (2000) die These der Ineffizienz der APT

5. Vgl. Fama & French (1992, S. 428ff, 450f), Sattler (1994, S. 122ff).

6. Vgl. Sattler (1994, S. 119ff).

7. Vgl. Rosenberg et al. (1985, S. 9).

von Ross (1976) zu. Er zeigt auf, dass in der APT noch nicht genauer spezifizierte unternehmensunabhängige Faktoren enthalten sind, welche die Rendite eines Unternehmens beeinflussen und interpretiert die systematische Fehleinschätzung der Kapitalgeber als einen dieser Faktoren. Eine theoretische Herleitung, dass gerade die Überreaktion ein Faktor der APT ist, bleibt jedoch aus.

Andere Darstellungen für den Einfluss des Buchwertes auf den Marktwert eines Unternehmens finden sich bei Damodaran (2001), Harris & Marston (1994) und Richter & Herrmann (2002). Die genannten Autoren entwickeln auf der Grundlage des Wachstumsmodells von Gordon (1955) eine Gleichung für das Marktwert-Buchwert-Verhältnis. Im Zuge der Herleitung setzen sie dabei den Marktwert des Eigenkapitals (die Summe der Aktienpreise) gleich dem Buchwert des Eigenkapitals (dem in der Bilanz ausgewiesenen Eigenkapital). Bei diesem Vorgehen wird nicht bedacht, dass unter dieser Voraussetzung das Marktwert-Buchwert-Verhältnis im Bewertungszeitpunkt gerade eins wird. Wenn man aber den Unterschied zwischen dem vergangenheitsbasierten Buchwert und dem auf zukünftigen Cashflows basierenden Marktwert herausstellen will, dann können der Marktwert des Eigenkapitals und der Buchwert des Eigenkapitals nicht gleich sein.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass empirisch die Korrelation von Buchwert und Marktwert gut dokumentiert ist. Die vorhandenen theoretischen Erklärungsansätze aber stellen nur Hypothesen dar, wie es zu dem Effekt kommen könnte. Eine Integration in existierende ökonomische Modelle, bei denen die Annahmen dieser Modelle (insbesondere die Arbitragefreiheit und die Rationalität der Akteure) nicht verletzt werden, unterbleibt aber. Man kann also im Grunde nicht von einer Erklärung, sondern nur von einer Erklärungshypothese sprechen.

Diese Arbeit hat sich das Ziel gesetzt, die beiden zu Beginn vorgestellten Herangehensweisen miteinander zu vereinen und die empirisch beobachtete Korrelation von Marktwert und Buchwert eines Unternehmens in ein formales DCF-Modell des Unternehmens zu integrieren. Dabei werden wir keine der Annahmen des DCF-Modells verletzen sondern sogar *beweisen*, dass unter spezifischen Annahmen (genauer: Annahmen an eine spezifische Investitionspolitik) tatsächlich Buchwert und Marktwert eines Unternehmens hoch korrelierte Grö-

ßen darstellen müssen. Es ist nicht notwendig, ein Theoriedefizit anzunehmen, noch handelt unsere Akteure irrational, ebenso bleiben die Märkte arbitragefrei. Unser Ergebnis vereint damit empirische und theoretische Literatur der Unternehmensbewertung.

Im Verlauf der theoretischen Analyse zeigt sich jedoch noch eine Überraschung. Wenngleich eine hohe Korrelation von Buchwert und Marktwert in unser Modell integriert werden kann, so erlaubt dies nicht den Schluss, der Marktwert-Buchwert-Multiplikator sei eine geeignete Kennzahl für die Unternehmensbewertung. Denn geht man von der durchaus akzeptablen Annahme aus, dass die Cashflows normalverteilt sind, dann kann der Erwartungswert des Quotienten Marktwert zu Buchwert nicht berechnet werden, weil er schlichtweg nicht existiert. Jede empirische Untersuchung dieses Quotienten und seine Verwendung als Multiplikator läuft also ins Leere. Das heißt auch, dass die bisherigen empirischen Untersuchungen zum Marktwert-Buchwert-Verhältnis sehr kritisch betrachtet werden müssen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: im nächsten Abschnitt werden die Annahmen des Modells vorgestellt. Im darauf folgenden Abschnitt präsentieren wir die wichtigsten Ergebnisse. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung.

2 Das Modell

2.1 Cashflow und Marktwert des Unternehmens

Wir unterscheiden verschiedene Zeitpunkte $t = 0, 1 \dots$, die Zukunft ist unsicher. \mathcal{F}_t stellt die im Zeitpunkt t verfügbare Information dar. Die Investoren bilden bedingte Erwartungen $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$ mit Hilfe einer subjektiven Wahrscheinlichkeit.

Wir werden der Einfachheit halber annehmen, dass das zu bewertende Unternehmen unverschuldet ist. Im Zeitpunkt t werden im Unternehmen Zahlungsüberschüsse in Höhe von \widetilde{FCF}_t aus operativer Tätigkeit erwirtschaftet. Die Cashflows folgen einem auto-regressiven Prozess, d.h. es gilt für alle Zeitpunkte $t \geq 0$

$$\widetilde{FCF}_{t+1} = (1 + g) \cdot \widetilde{FCF}_t + \tilde{\varepsilon}_{t+1}$$

für eine deterministische und konstante Wachstumsrate g .⁸ Die Störterme ε_t seien identisch verteilt und voneinander unabhängig; wir werden aber erst im Fortgang der Untersuchungen Annahmen an die Verteilung der Störterme treffen. Bezeichnen wir mit FCF_0 den ersten Cashflow, dann folgt aus der Autoregression

$$\widetilde{FCF}_t = (1 + g)^t FCF_0 + (1 + g)^{t-1} \tilde{\varepsilon}_1 + \dots + \tilde{\varepsilon}_t. \quad (1)$$

Den Marktwert eines Unternehmens wird bestimmt, indem zukünftig erwartete Cashflows auf den Bewertungszeitpunkt diskontiert werden. Wir unterstellen, dass die Kapitalkosten im Zeitablauf konstant bleiben und bezeichnen sie mit k .⁹ Damit gilt für die bedingten erwarteten Renditen des Unternehmens

$$k = \frac{E[\widetilde{FCF}_{t+1} + \tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t]}{\tilde{V}_t} - 1$$

und es folgt dann die Bewertungsgleichung für das Unternehmen

$$\tilde{V}_t = \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{E[\widetilde{FCF}_s | \mathcal{F}_t]}{(1 + k)^{s-t}}.$$

Weil die Wachstumsraten konstant sind, lässt sich der Wert des Unternehmens einfacher schreiben als

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{(1 + g)^{s-t} \widetilde{FCF}_t}{(1 + k)^{s-t}} \\ &= \frac{1 + g}{k - g} \widetilde{FCF}_t := \frac{\widetilde{FCF}_t}{d}, \end{aligned} \quad (2)$$

wenn d das Verhältnisses von Dividende zu Unternehmenswert (auch Dividendenrendite) bezeichnet. In der Literatur wird diese Gleichung auch als Gordon-Shapiro-Formel bezeichnet.

8. Zur Natur dieser Annahme vergleiche etwa Ohlson (1980), Garmann & Ohlson (1981) oder Kruschwitz & Löffler (2003). Christensen & Feltham (2003, S. 694) nutzen eine vergleichbare Annahme - allerdings fügen beide Autoren dem Cashflow einen zeitlich veränderlichen, aber nicht stochastischen Störterm hinzu. Dort lautet die Voraussetzung also

$$\widetilde{FCF}_{t+1}^u = (1 + g) \cdot \widetilde{FCF}_t^u + c_t + \tilde{\varepsilon}_{t+1}.$$

9. Vgl. hierzu auch Hachmeister (1998), Fama (1977, S. 23) und Fama (1996, S. 426).

2.2 Der Buchwert des Unternehmens

Wenden wir uns nun dem Buchwert des Unternehmens zu. Unter Buchwert wollen wir im Folgenden den bilanziellen Wert des Eigenkapitals des (unverschuldeten) Unternehmens verstehen. Daher verwenden wir die Begriffe Buchwert, Bilanzwert des Eigenkapitals oder auch Bilanzsumme synonym.

Konzentrieren wir uns nun auf den Buchwert des Unternehmens. Ohne weitere Annahmen können wir davon ausgehen, dass dieser Buchwert in der Zukunft eine unsichere Größe darstellt. Wir wollen ihn daher mit \tilde{V}_t bezeichnen. Da für die Analyse nicht nur heutige, sondern auch zukünftige Buchwerte des Unternehmens bestimmt werden müssen, ist es notwendig, sich die Einflussfaktoren des Buchwertes zu verdeutlichen.

Der Buchwert des Eigenkapitals ändert sich, wenn Kapitalerhöhungen durchgeführt oder Kapitalherabsetzungen vorgenommen werden. Wir werden davon ausgehen, dass keine exogenen Änderungen beim Eigenkapital erfolgen. Der Buchwert des Eigenkapitals wächst, wenn das Unternehmen Gewinne einbehält. Die Gewinne vor Steuern am Periodenende werden wir mit \widetilde{EBIT}_t bezeichnen. Wenn τ den Unternehmenssteuersatz darstellt, dann kann das Unternehmen am Periodenende insgesamt $\widetilde{EBIT}_t(1 - \tau)$ einbehalten.

Des weiteren sinkt der Buchwert des Eigenkapitals, wenn Dividenden ausgeschüttet werden. In diesem Zusammenhang werden wir unterstellen, dass die nicht im Unternehmen investierten Beträge vollständig ausgeschüttet werden. Die Ausschüttung an die Eigentümer am Ende der t -ten Periode beläuft sich beim verschuldeten Unternehmen auf genau \widetilde{FCF}_t .

Wenn wir uns auf diese drei Einflussfaktoren des Buchwertes beschränken, dann sind wir in der Lage, eine Bewegungsgleichung für den Buchwert des Unternehmens anzugeben. Sie lautet

$$\tilde{V}_{t+1} = \tilde{V}_t + \widetilde{EBIT}_{t+1}(1 - \tau) - \widetilde{FCF}_{t+1} \quad (3)$$

und wird in der Literatur auch clean surplus relation genannt.¹⁰

Eine andere Ausprägung der clean surplus relation erhalten wir, wenn wir uns klarmachen, dass die Differenz zwischen Gewinnen und Dividenden aus der Aktivierung von Investitionen entsteht. Werden Investitionen aktiviert, dann

10. Siehe Feltham & Ohlsen (1995, S. 694).

entsteht zwischen den Zahlungsüberschüssen (also den Einzahlungen abzüglich der Auszahlungen) und den Gewinnen (also den Erträgen abzüglich der Auszahlungen) eine Differenz, die in der Literatur auch als Accruals bezeichnet wird. Der Begriff der Accruals beschreibt dabei nicht nur die Differenz aus Investitionen und Abschreibungen, sondern umfasst die gesamte Differenz aus Zahlungs- und Gewinngrößen:¹¹

$$\widetilde{Acr}_t = \widetilde{BCF}_t - \widetilde{EBIT}_t.$$

Da der Cashflow nach Steuern für Investitionen und Ausschüttungen verwendet werden kann (das Unternehmen ist unverschuldet), ergibt sich daraus

$$\widetilde{EBIT}_t + \widetilde{Acr}_t = \widetilde{BCF}_t = \tau \widetilde{EBIT}_t + \widetilde{Inv}_t + \widetilde{FCF}_t. \quad (4)$$

und wir erhalten unmittelbar

$$\widetilde{EBIT}_t(1 - \tau) - \widetilde{FCF}_t = \widetilde{Inv}_t - \widetilde{Acr}_t. \quad (5)$$

Um nun weitere Erkenntnisse über die Entwicklung des Buchwertes zu gewinnen, muss die Investitionspolitik des Unternehmens genau charakterisiert werden.

An Hand der bisherigen Überlegungen wird deutlich, dass für die Ermittlung zukünftiger Buchwerte sicherlich die Kenntnis der Investitions- und der Abschreibungspolitik des Unternehmens notwendig ist. Zwar gehen beide Komponenten auch in den Marktwert des Unternehmens ein (beispielsweise indem sie die Entwicklung der zukünftigen Cashflows bestimmen), werden dort aber nicht weiter expliziert. Hier dagegen ist es wesentlich, welche Voraussetzungen wir über die Investitions- und Abschreibungspolitiken treffen.

Bisher haben wir die Investitionspolitik des Unternehmens nicht näher charakterisiert. Es gibt mehrere verschiedene Möglichkeiten, welcher Investitionspolitik das Unternehmen folgt. In der Literatur finden sich bisher zwei verschiedene Politiken:¹²

1. So könnten wir beispielsweise unterstellen, dass das Unternehmen nur Erhaltungsinvestitionen in Höhe der Abschreibungen vornimmt.

11. Weiterführende Erklärungen zum Begriff der Accruals findet man in der deutschsprachigen Literatur bei Ewert & Wagenhofer (2002, S. 168-179).

12. Siehe Kruschwitz & Löffler (2003, Abschnitt 2.5.3 und 2.5.4).

2. Ebenso könnten wir auch annehmen, dass sich die Investitionen an der Höhe der Brutto-Cashflows orientieren.

Es zeigt sich nun unmittelbar aus Gleichung (5), dass im Fall einer Erhaltungsinvestition die zukünftigen Buchwerte des Unternehmens sichere Größen darstellen. In einer solchen Situation wären aber Buchwerte und Marktwerte des Unternehmens gänzlich unkorreliert - ein Verhalten, das wir empirisch nicht bestätigt finden. Daher wenden wir uns ausschließlich der zweiten genannten Investitionspolitik zu.

Für die Investitionspolitik nehmen wir nun an, dass die Investitionen den Brutto-Cashflows nach Steuern folgen

$$\widetilde{Inv}_t = \gamma \cdot (\widetilde{BCF}_t - \tau \widetilde{EBIT}_t) .$$

Das bedeutet im Übrigen nicht nur, dass die Investitionsquote in der Zukunft konstant bleibt. Die Annahme unterstellt auch, dass die Investitionspolitik die gleiche Zufälligkeit wie die freien Cashflows des Unternehmens aufweist: denn aus (4) ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\widetilde{Inv}_t = \alpha \cdot \widetilde{FCF}_t \tag{6}$$

für $\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma}$. Sollten die freien Cashflows eines bestimmten Zeitpunktes in einem Zustand also niedrig sein, wird wenig investiert, fallen sie dagegen in einem anderen Zustand hoch aus, wird viel investiert. Sind sogar die Cashflows in einem bestimmten Zustand negativ, müssen Desinvestitionen vorgenommen werden. Wir werden eine derartige Investitionspolitik cashflow-orientiert nennen.

Diese von uns getroffene Annahme scheint den in der Finanzwirtschaft üblichen Prämissen zu widersprechen: Dort wird unterstellt, dass die Investitionspolitik so zu bemessen ist, dass alle Investitionen mit positivem Kapitalwert durchgeführt werden. Es ist a priori nicht klar, dass alle Investitionen mit positiven Kapitalwert in ihrer Zufälligkeit immer genau dem Netto-Cashflow folgen werden. Fazzari, Hubbard & Petersen (1988) konnten jedoch zeigen, dass die interne Finanzierungssituation und damit die Cashflows interdependent mit der Investitionspolitik sind. Sie wiesen nach, dass Marktunvollkommenheiten Unternehmen in ihrer Fähigkeit beschränken können, externes Kapital zu erwerben.

Daher ist es in der Tat möglich, dass Fluktuationen im Cashflow für Veränderungen im Investitionsniveau verantwortlich sind. Von daher sind wir der Meinung, dass eine cashflow-orientierte Investitionspolitik eine zweckmäßige Annahme darstellt.

Nachdem wir uns Klarheit über die Annahmen an die Investitionspolitik verschafft haben, wenden wir uns den Accruals zu. In der Literatur wird zwischen diskretionären und nicht diskretionären Accruals unterschieden.¹³ Eine einheitliche Definition für nicht diskretionäre Accruals existiert jedoch nicht. Wir haben uns hier entschlossen, unter nicht diskretionären Accruals diejenigen zu verstehen, die sich linear aus den Investitionen ergeben: für eine Zeitdauer n gilt also der Zusammenhang

$$\widetilde{Acr}_t = \frac{1}{n} (\widetilde{Inv}_{t-1} + \dots + \widetilde{Inv}_{t-n}). \quad (7)$$

Diese Voraussetzung ist in jedem Fall vertretbar, wenn die Investitionen des Unternehmens linear abgeschrieben werden und keine Zuführungen oder Auflösungen von Rückstellungen erfolgen. Stellt man sich auf diesen Standpunkt, dann können wir unsere Gleichung (7) dahingehend interpretieren, dass eine Investition des Zeitpunktes t erstmalig in $t + 1$ abgeschrieben wird. Daher werden wir n auch "verallgemeinerte Abschreibungsdauer" nennen. Hier wären andere Annahmen denkbar, die wir aber nicht weiter verfolgen werden.

Anhand der Voraussetzung (7) wird deutlich, dass zur Bewertung auch die Kenntnis vergangener Investitionen notwendig ist. Dies wird klar, wenn man sich die Accruals in den späteren Perioden näher anschaut. Liegt etwa der Fall eines Unternehmens mit linearer Abschreibung vor und bildet das Unternehmen keine Rückstellungen, dann erfordert die Ermittlung von \widetilde{Acr}_2 bei dreijähriger Abschreibungsdauer die Kenntnis der Investitionen der Zeitpunkte $t = 1, 0, -1$.

3 Ergebnisse

Im Rahmen unseres Modells lassen sich nun die folgenden Aussagen zum Marktwert-Buchwert-Verhältnis beweisen. Zuerst zeigt sich, dass im Rahmen unseres Modells der Buchwert in der Tat mit dem Marktwert des Unternehmens hoch korre-

13. Siehe Ewert & Wagenhofer (2002, S. 168-179).

liert ist. Im Grenzübergang eines unendlichen Zeithorizonts sind beide Größen sogar perfekt korreliert. Die empirischen Befunde finden im Rahmen unseres Modells eine theoretische Rechtfertigung und Präzisierung.

Man könnte des Weiteren vermuten, dass dieses Ergebnis auf die von uns getroffenen Annahmen zurückzuführen ist. Dies ist sicherlich logisch korrekt. Dennoch überrascht, dass die Korrelation zwischen Marktwert und Buchwert nur von zwei Größen abhängig ist: der verallgemeinerte Abschreibungsdauer n und dem Zeitpunkt t . Die Investitionsquote α hat keinen Einfluss auf die Höhe der Korrelation. Ebenso spielen die Kapitalkosten k bei der Korrelation keine Rolle. Dies lässt vermuten, dass das Ergebnis in Bezug auf Variationen des Unternehmensrisikos und der Höhe der Investition robust ist.

Satz 1 (Korrelation Marktwert und Buchwert) *Der Korrelationskoeffizient von Marktwert \tilde{V}_t und Buchwert \tilde{B}_t hängt nur vom Zeitpunkt t und der verallgemeinerten Abschreibungsdauer n ab.*

Geht der Zeitpunkt t gegen unendlich ($t \rightarrow \infty$), dann sind Marktwert und Buchwert des Unternehmens perfekt korreliert.

Die Abbildung 1 zeigt für den Fall $n = 5$, wie sich der Korrelationskoeffizient ρ im Zeitablauf entwickelt. Man kann unmittelbar erkennen, dass bereits für sehr naheliegende Zeitpunkte t eine sehr hohe Korrelation zwischen Buchwert und Marktwert des Unternehmens vorliegt. Auch dies zeigt noch einmal, dass im Rahmen unseres Modells empirisch gewonnene Ergebnisse auch theoretisch abgeleitet werden können: unser Modell ergibt bei realistischen Abschreibungsdauern bereits eine sehr hohe Korrelation von Marktwert und Buchwert.

Zur weiteren Analyse der stochastischen Entwicklung der Wertgrößen des Unternehmens und damit letztlich des Marktwert-Buchwert-Multiplikators werden wir nun annehmen, dass die Störterme ε_t normalverteilt sind. Die Normalverteilung bietet sich dabei besonders als zugrunde liegende Verteilung an, da sie mathematisch leicht zu handhaben ist und ihre symmetrische Glockenform viele in der Realität vorkommende Verteilungen gut abbildet. Zudem kann mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Normalverteilung dazu genutzt werden, mehrere andere Verteilungsfunktionen zu approximieren (vgl. hierzu Casella & Berger (2002, S. 102)). Dies ist auch der Grund, warum die Normalverteilung traditio-

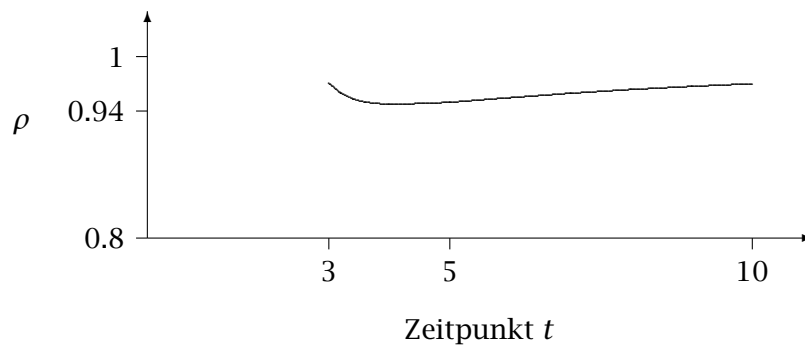


Abbildung 1: Korrelationskoeffizient ρ von Buchwert und Marktwert für $n = 5$

neller Weise in empirischen Analysen und so auch in allen eingangs erwähnten Untersuchungen zum Marktwert–Buchwert–Verhältnis Anwendung findet.

Überraschenderweise gilt nun für den uns interessierenden Marktwert–Buchwert–Quotienten folgende Aussage.

Satz 2 (Erwartungswert des Marktwert–Buchwert–Verhältnis) *Wenn die Störterme ε der Cashflows normalverteilt sind, dann besitzt das Marktwert–Buchwert–Verhältnis keinen endlichen Erwartungswert und damit auch keine Varianz.*

Wie ist dieses Ergebnis zu verstehen? Dazu muss man sich folgendes klar machen. Wenn wir unterstellen, dass die Störterme ε normalverteilt sind, dann ergibt sich aus Gleichung (1) sofort, dass auch die Cashflows des Unternehmens normalverteilt sind. Da wir auto-regressive Cashflows unterstellten, müssen dann aber auch die Marktwerte des Unternehmens normalverteilt sein (dies erkennt man direkt aus der Gordon–Shapiro–Gleichung (2)). Man kann nun weiter zeigen, dass bei einer cashfloworientierten Investitionspolitik auch der Buchwert des Unternehmens normalverteilt sein muss. Das Buchwert–Marktwert–Verhältnis ist also ein Quotient aus zwei Normalverteilungen. Es ist aus der statistischen Literatur bekannt, dass dieser Quotient eine Cauchy–Verteilung besitzt – und diese aber weist weder Erwartungswert noch Varianz auf. Diese Erkenntnis liefert die Intuition für unseren Satz 2.

Das Ergebnis unseres Satzes 2 erlaubt folgende weitere Schlussfolgerung. Wir

hatten die Annahme der Normalverteilung gerade deshalb als plausibel dargestellt, weil sie in empirischen Untersuchungen meist vorausgesetzt wird.¹⁴ Wenn sich aber im Rahmen eines theoretischen Modells zeigt, dass für das Buchwert-Marktwert-Verhältnis nicht einmal das einfachste Moment ermittelt werden kann, dann lässt sich daraus auch nicht der Schluss ziehen, das Buchwert-Marktwert-Verhältnis sei eine ökonomisch sinnvolle Größe. Vielmehr müssen wir festhalten, dass dessen Verwendung als Multiplikator in der Unternehmensbewertung durch unseren Ansatz gerade *nicht* sinnvoll begründet werden kann. Obwohl der Buchwert eine sehr starke Korrelation zum Marktwert aufweist, ist der Quotient statistisch eine nicht handhabbare Größe.

4 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es zu zeigen, wie ein empirisch wohl dokumentiertes Phänomen in ein formales Modell integriert werden kann, ohne Theoriedefizite oder Irrationalitäten der Akteure anzunehmen. Dazu wurde für ein unverschuldetes Unternehmen gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen dessen Buchwert und Marktwert hoch korrelierte Größen darstellen. Gleichzeitig erwies sich aber der Quotient aus Buchwert und Marktwert als eine Größe, die keinen Erwartungswert aufweist und sich daher elementaren statistischen Untersuchungen entziehen muss.

Da es sich hier um eine theoretische Analyse handelt, müssen die Aussagen dieser Arbeit auf gewissen Annahmen beruhen. Dennoch ist die Frage zu stellen, inwieweit unsere Annahmen notwendig und plausibel gewählt wurden. So haben wir im Rahmen dieser Untersuchung eine cashfloworientierte Investitionspolitik vorausgesetzt. Es bleibt zu prüfen, ob sich die Ergebnisse aufrecht erhalten lassen, wenn im Unternehmen eine andere Investitionspolitik verfolgt wird.

Auch ist unsere Annahme der Normalverteilung der Störterme kritisch zu sehen (wenngleich unter einer anderen Verteilungsannahme die bisherigen empirischen Studien ihre Aussagekraft vermutlich einbüßen). So könnte ebenso

14. So findet sie sich in allen eingangs erwähnten empirischen Studien zum Einfluss des Buchwertes auf den Marktwert.

angenommen werden, dass die Störterme binomialverteilt sind – in diesem Fall würde der Quotient aus Marktwert und Buchwert durchaus einen Erwartungswert aufweisen, dann ist aber auch die Verteilung des Quotienten nicht mehr binomial-, sondern wesentlich komplizierter verteilt.

Bei unserer Darstellung des Buchwertes haben wir bilanztechnische Spielräume des \widetilde{EBIT} nicht erfasst. So können unterschiedliche Rechnungslegungssysteme (man denke an IAS, US-GAAP und HGB) zu unterschiedlichen Ergebnissen in der Bilanzsumme führen und demnach auch zu unterschiedlichen Stochastiken des Buchwerts.¹⁵ Wahlrechte können innerhalb eines Rechnungslegungssystems Einfluss auf den Buchwert ausüben – auch dies Effekte, die sich noch nicht im Rahmen unseres Modells abbilden lassen.¹⁶ Im Rahmen der weiteren Forschung muss das hier vorgestellte DCF-Modell ausgebaut werden, um den Einfluss von Rechnungslegungssystemen auf die Korrelation von Buchwert und Marktwert des Unternehmens genauer analysieren zu können.

5 Anhang

5.1 Beweis Satz 1

Der Beweis des Satzes ist sehr umfangreich. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. Wir beginnen damit, ein Bewegungsgesetz für den Buchwert herzuleiten. Dieses Bewegungsgesetz bezieht den zukünftigen Buchwert \tilde{V}_t auf die Cashflows bis zum Zeitpunkt t .
2. Dann nutzen wir aus, dass sich die Bewegung der zukünftigen Cashflows aus den Störtermen ε_t ergibt. Dies erlaubt es uns, den Buchwert \tilde{V}_t als Funktion dieser Störterme darzustellen.
3. Ebenso können wir den zukünftigen Marktwert \tilde{V}_t als Funktion der Störterme darstellen.

15. Vgl. Kleekämper (1995, S. 428f) und Hommel (1997, S. 345f).

16. Vgl. Schildbach (2002, S. 265ff) und Schildbach (1998, S. 56-66).

4. Zuletzt setzen wir die beiden Gleichungen in die Definition des Korrelationskoeffizienten ρ ein und erhalten einen funktionalen Ausdruck für ρ .

1. Bewegungsgleichung für den Buchwert als Funktion der Cashflows Wir beginnen damit, die Differenz zwischen Investitionen und Abschreibungen darzustellen. Wegen der Definition der linearen Abschreibung können wir zunächst

$$\widetilde{Inv}_t - \widetilde{Acr}_t = \widetilde{Inv}_t - \frac{1}{n} (\widetilde{Inv}_{t-1} + \dots + \widetilde{Inv}_{t-n})$$

schreiben. Es liegt nahe, nun die Relation (6) zu verwenden und I_s durch $\alpha_s \widetilde{FCF}_s$ zu ersetzen. Das scheitert jedoch daran, dass wir in Bezug auf Investitionsbeträge, die nicht in der Zukunft liegen, mit historischen Investitionen rechnen müssen und nur in Bezug auf künftige Investitionsbeträge an freie Cashflows anknüpfen können. Mit der Hilfsvariablen

$$\tilde{H}_s = \begin{cases} \alpha_s \widetilde{FCF}_s, & \text{wenn } s > 0 \\ I_s, & \text{sonst} \end{cases}$$

(wir kennzeichnen sie weiterhin als Zufallsvariable, auch wenn sie für $t < 0$ eine sichere Größe sein sollte) gewinnen wir für alle $t \geq 1$ die Gleichung

$$I_t - \widetilde{Acr}_t = \tilde{H}_t - \frac{1}{n} (\tilde{H}_{t-1} + \dots + \tilde{H}_{t-n})$$

Der Buchwert des Gesamtkapitals kann wegen (3) nun wie folgt notiert werden

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \underline{V}_0 + \sum_{s=1}^t \left(\tilde{H}_s - \frac{1}{n} \sum_{r=s-1}^{s-n} \tilde{H}_r \right) \\ &= \underline{V}_0 + \sum_{s=1}^t \tilde{H}_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^t \sum_{r=s-n}^{s-1} \tilde{H}_r \\ &= \underline{V}_0 + \sum_{s=1}^t \tilde{H}_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^t \sum_{r=0}^{n-1} \tilde{H}_{r+s-n} \end{aligned} \quad (8)$$

Die Doppelsumme kann weiter vereinfacht werden. Dazu müssen wir nur wissen, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine gegebene und feste Zahl a als Summe $a = r + s$ derart darzustellen, dass der erste Summand r zwischen den Werten 0 und $n - 1$ und der zweite Summand s zwischen den Werten 1 und t liegt. Wir

zeigen zuerst, dass die Anzahl dieser Möglichkeiten gerade durch den Ausdruck

$$A(a) := \begin{cases} a & \text{wenn } 0 < a < \min(t, n) \\ \min(t, n) & \text{wenn } \min(t, n) \leq a \leq \max(t, n) \\ n + t - a & \text{wenn } \max(t, n) < a < n + t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben ist. Dazu stellen wir die Zahl $a = r + s$ als eine Summe von Einsen mit einem senkrechten Trennstrich zwischen r und s dar

$$\underbrace{\overbrace{1 \ 1 \ 1 \ 1}^r | \overbrace{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}^s}_a$$

Dieser Trennstrich kann dabei vor der ersten eins liegen (weil $r \geq 0$), darf sich aber nicht hinter der letzten eins befinden (weil $s > 0$). Damit bestehen genau $A(a) = a$ Möglichkeiten; dies erklärt die erste Zeile der Definition. Mit jeder Erhöhung von a um eins wächst die Anzahl $A(a)$ ebenfalls um eins.

Wächst a aber über $\min(n, t)$ hinaus, so verbleibt $A(a)$ auf dem erreichten Niveau, denn der eingezeichnete Trennstrich kann jetzt nicht mehr jede mögliche Position einnehmen. Ist beispielsweise $n \leq t$ und demzufolge auch $n < a$, so kann der Trennstrich nicht hinter der n -ten eins stehen, weil $r < n$ gelten muss. Analog argumentiert man bei $n > t$. Dies erklärt die zweite Zeile der Definition.

Die dritte Zeile der Definition erschließt sich wie folgt. Dazu betrachten wir die Summendarstellung von $r + s$, in der der Trennstrich am weitesten links steht. Da a größer als n und t ist, ist nach dem Anfügen der zusätzlichen eins rechts diese Position des Trennstriches nicht mehr erlaubt, da der Summand s durch die zusätzliche eins zu groß würde. Damit ist unser Beweis der Herleitung von $A(a)$ abgeschlossen.

Somit vereinfacht sich die Gleichung (8) (man beachte, dass $A(n + t) = 0$ gilt)

zu

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t &= \underline{V}_0 + \sum_{a=1}^t \tilde{H}_a - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{n+t} A(a) \tilde{H}_{a-n} \\
&= \underline{V}_0 - \sum_{a=1-n}^0 \frac{A(a+n)}{n} \tilde{H}_a + \sum_{a=1}^t \left(1 - \frac{A(a+n)}{n}\right) \tilde{H}_a \\
&= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^0 \frac{A(s+n)}{n} I_s + \sum_{s=1}^t \left(1 - \frac{A(s+n)}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s. \tag{9}
\end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichung des Buchwertes kann noch weiter vereinfacht werden. Dazu treffen eine Fallunterscheidung.

Zuerst sei $n < t$. Dann gilt aufgrund der Definition der $A(s+n)$

$$\begin{aligned}
A(s+n) &= \begin{cases} s+n & \text{wenn } 0 < s+n < n \\ n & \text{wenn } n \leq s+n \leq t \\ n+t-s-n & \text{wenn } t < s+n < n+t \end{cases} \\
&= \begin{cases} s+n & \text{wenn } -n < s < 0 \\ n & \text{wenn } 0 \leq s \leq t-n \\ t-s & \text{wenn } t-n < s < t \end{cases}
\end{aligned}$$

Jetzt können wir uns dem zweiten und dritten Summanden jeweils getrennt zuwenden. Da im ersten Summanden der Laufindex s nur von $1-n$ bis 0 und im zweiten Summanden der Laufindex zwischen 1 und t läuft, vereinfacht sich (9) zu

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t &= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^0 \frac{A(s+n)}{n} I_s + \sum_{s=1}^{t-n} \left(1 - \frac{A(s+n)}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s + \sum_{s=t-n+1}^t \left(1 - \frac{A(s+n)}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s \\
&= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^0 \frac{s+n}{n} I_s + \sum_{s=1}^{t-n} \left(1 - \frac{n}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s + \sum_{s=t-n+1}^t \left(1 - \frac{t-s}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s \\
&= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^0 \frac{s+n}{n} I_s + \sum_{s=t-n+1}^t \frac{n-t+s}{n} \alpha \widetilde{FCF}_s. \tag{10}
\end{aligned}$$

Sei nun $n \geq t$. Dann gilt aufgrund der Definition der $A(s+n)$

$$A(s+n) = \begin{cases} s+n & \text{wenn } 0 < s+n < t \\ t & \text{wenn } t \leq s+n \leq n \\ n+t-s-n & \text{wenn } n < s+n < n+t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s+n & \text{wenn } s < t-n \\ t & \text{wenn } t-n \leq s \leq 0 \\ t-s & \text{wenn } 0 < s < t \end{cases}$$

Jetzt können wir wieder den zweiten und dritten Summanden jeweils getrennt vereinfachen. Im ersten Summanden läuft der Laufindex s von $1-n$ bis 0 und im zweiten Summanden von 1 und t . Daher vereinfacht sich (9) zu

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^{t-n} \frac{A(s+n)}{n} I_s - \sum_{s=t-n+1}^0 \frac{A(s+n)}{n} I_s + \sum_{s=1}^t \left(1 - \frac{A(s+n)}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s \\ &= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^{t-n} \frac{s+n}{n} I_s - \sum_{s=t-n+1}^0 \frac{t}{n} I_s + \sum_{s=1}^t \left(1 - \frac{t-s}{n}\right) \alpha \widetilde{FCF}_s \\ &= \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^0 \frac{\min(s+n, t)}{n} I_s + \sum_{s=1}^t \frac{n-t+s}{n} \alpha \widetilde{FCF}_s. \end{aligned} \quad (11)$$

Jetzt sind wir in der Lage, beide Fälle $n < t$ und $n \geq t$ zusammenzuführen. Die Gleichungen (10) und (11) ergeben in kompakter Schreibweise

$$\tilde{V}_t = \underline{V}_0 - \sum_{s=1-n}^0 \frac{\min(s+n, t)}{n} I_s + \sum_{s=1+\max(t-n, 0)}^t \frac{n-t+s}{n} \alpha \widetilde{FCF}_s.$$

Wir fassen die ersten drei Summanden in der Bewegungsgleichung für den Buchwert aus Gründen der besseren Lesbarkeit zu einer Größe zusammen und bezeichnen sie mit \underline{V}_0^* . Es handelt sich ökonomisch um jenen Betrag, den der Buchwert des Gesamtkapitals annehmen würde, wenn bis zum Zeitpunkt t jegliche Investitionen unterbleiben würden. Da auch die Maximumfunktion in der Summationsgrenze der zweiten Summe unhandlich ist, treffen wir die formale Festlegung $\widetilde{FCF}_s = 0$ für $s \leq 0$. Jetzt muss nicht mehr auf die untere Summationsgrenze Rücksicht genommen werden. Das führt uns auf die besser überschaubare Darstellung

$$\tilde{V}_t = \underline{V}_0^* + \alpha \sum_{s=t-n+1}^t \frac{n-(t-s)}{n} \widetilde{FCF}_s.$$

2. Bewegungsgleichung für den Buchwert als Funktion der Störterme Die ersten beiden Summanden der rechten Seite sind deterministisch. Die Verteilung des Buchwertes wird also von der Summe der freien Cashflows

$$\sum_{s=1+\max(t-n,0)}^t \frac{n-t+s}{n} \alpha \widetilde{FCF}_s$$

bestimmt. Da die Cashflows auto-regressiv sind (siehe Gleichung (1)), lässt sich diese Summe auch wie folgt schreiben

$$\sum_{s=1+\max(t-n,0)}^t \frac{n-t+s}{n} \alpha \left(FCF_0 + \sum_{r=1}^s (1+g)^{s-r} \varepsilon_r \right)$$

Wir hatten vorausgesetzt, dass weder Wachstum ($g = 0$) und noch vergangene Investitionen vorlagen. Dann vereinfacht sich die Darstellung zusammen mit der Tatsache, dass die Cashflows auto-regressiv sind, zu der Gleichung

$$\tilde{V}_t = \underline{V}_0 + \sum_{s=1+\max(t-n,0)}^t \frac{n-t+s}{n} \alpha \left(FCF_0 + \sum_{r=1}^s \varepsilon_r \right).$$

Im folgenden ändern wir den Summationsindex von s zu $s-t+n$. Da auch $t \geq n$ gilt, schreibt sich die vorangegangene Gleichung als

$$\tilde{V}_t = \underline{V}_0 + \sum_{s=1}^n \frac{s}{n} \alpha \left(FCF_0 + \sum_{r=1}^{s+t-n} \varepsilon_r \right).$$

Um die Korrelation aus Buchwert und Marktwert zu bestimmen, müssen wir die Varianz des Buchwertes kennen. Dazu haben wir die Bestimmungsgleichung des Buchwertes umzuformen, um zu einer übersichtlichen Darstellung zu gelangen. Es gilt zuerst

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= \underline{V}_0 + \frac{\alpha}{n} \frac{n(n+1)}{2} FCF_0 + \frac{\alpha}{n} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^{s+t-n} s \varepsilon_r \\ &= \underline{V}_0 + \frac{n+1}{2} \alpha FCF_0 + \frac{\alpha}{n} \left(\sum_{r=1}^{t-n+1} \sum_{s=1}^n s \varepsilon_r + \sum_{r=t-n+2}^t \sum_{s=r-t+n}^n s \varepsilon_r \right) \\ &= \underline{V}_0 + \frac{n+1}{2} \alpha FCF_0 + \frac{\alpha}{n} \left(\sum_{r=1}^{t-n+1} \frac{n(n+1)}{2} \varepsilon_r + \sum_{r=t-n+2}^t \frac{(t-r-2n)(r-t-1)}{2} \varepsilon_r \right) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen

$$\tilde{V}_t = V_0 + \frac{n+1}{2} \alpha FCF_0 + \frac{n+1}{2} \alpha \sum_{r=1}^{t-n+1} \varepsilon_r + \alpha \sum_{r=t-n+2}^t \frac{(t-r-2n)(r-t-1)}{2n} \varepsilon_r.$$

Die Störterme besitzen eine Varianz von e und sind paarweise unabhängig. So ergibt sich für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{V}_t] &= \frac{(n+1)^2}{4} \alpha^2 \sum_{r=1}^{t-n+1} e + \alpha^2 \sum_{r=t-n+2}^t \frac{(t-r-2n)^2(r-t-1)^2}{4n^2} e \\ &= \frac{(n+1)(2+n(8+15t) + n^2(15t-3) - 7n^3)}{60n} \alpha^2 e \end{aligned}$$

3. Der Marktwert als Funktion der Störterme Es gilt für den Marktwert des Unternehmens

$$\tilde{V}_t = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^t \varepsilon_r$$

sowie

$$\text{Var}[\tilde{V}_t] = \frac{te}{k^2}.$$

4. Die Bestimmung des Korrelationskoeffizienten Zuletzt soll die Kovarianz aus Buchwert und Marktwert bestimmt werden. Für die Kovarianz folgt

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\tilde{V}_t, \tilde{V}_t] &= \frac{n+1}{2} \alpha \sum_{r=1}^{t-n+1} e + \alpha \sum_{r=t-n+2}^t \frac{(t-r-2n)(r-t-1)}{2n} e \\ &= \frac{n(n+1)(3t-n+1)}{6} \frac{\alpha e}{k} \end{aligned}$$

und dies ergibt für die Korrelation

$$\rho(n, t) = \sqrt{\frac{5(1+n)(1-n+3t)^2 n}{3t(2+n(8+15t) + n^2(15t-3) - 7n^3)}}$$

Dass der Korrelationskoeffizient gegen eins geht, erkennt man wie folgt

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(n, t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{t^2} 5(1+n)(1-n+3t)^2 n}{\frac{1}{t^2} 3t(2+n(8+15t)) + n^2(15t-3) - 7n^3}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{5(1+n)9n + \frac{1}{t}(\dots)}{3(15n+15n^2) + \frac{1}{t}(\dots)}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{5(1+n)9n}{3(15n+15n^2)}} \\
 &= \sqrt{\frac{45(1+n)n}{45n(n+1)}} = 1
 \end{aligned}$$

5.2 Beweis Satz 2

Sowohl der Buchwert als auch der Marktwert des Unternehmens sind normalverteilt. Wir können das aus der Literatur bekannte Resultat, dass der Quotient zweier unabhängiger normalverteilter Größen Cauchy-verteilt ist, deshalb nicht sofort nutzen, weil Buchwert und Marktwert des Unternehmens sicherlich miteinander korreliert (wenn auch nicht vollständig korreliert) sind. Daher sind etwas umfangreichere Überlegungen notwendig. Dazu zeigen wir, dass der Quotient zweier (nicht vollständig) korrelierter Standard-normalverteilter Zufallsvariablen X, Y keinen Erwartungswert besitzt.

Die Zufallsvariablen X und Y weisen die Korrelation ρ auf und haben die gemeinsame Dichte¹⁷

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}$$

Dann ergibt sich die folgende Verteilung für den Quotienten $\frac{X}{Y}$:

$$\begin{aligned}
 f_{X/Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |t| f_{X,Y}(z \cdot t, t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |t| \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((zt)^2+t^2-2\rho zt^2)} dt
 \end{aligned}$$

17. Vergl. Casella & Berger (2002, S. 167).

Wegen der Symmetrie vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
 f_{X/Y}(z) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty t e^{-\overbrace{\frac{1+z^2-2\rho z}{1-\rho^2} \frac{t^2}{2}}^{=:v}} dt \\
 &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1-\rho^2}{1+z^2-2\rho z} \underbrace{\int_0^\infty e^{-v} dv}_{=1} \\
 &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1+z^2-2\rho z)}
 \end{aligned}$$

Diese Verteilung ähnelt der Cauchy-Verteilung. Sie ist aber nur für den Fall $\rho = 0$ identisch der Cauchy-Verteilung, in allen anderen Fällen sind die Verteilungsfunktionen nicht gleich. Der Erwartungswert des Buchwert-Marktwert-Verhältnisses wäre das Integral

$$E[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(1+z^2-2\rho z)} z dz.$$

Wir zeigen nun, dass dieses Integral nicht existiert. Dazu betrachten wir für eine Zahl M (zu dieser Rechnung vergleiche Casella & Berger (2002, S. 55))

$$\int_0^M \frac{z}{1+z^2-2\rho z} dz = \left[\frac{\rho \operatorname{Arctan}\left(\frac{z-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{1}{2} \log(1+z^2-2\rho z) \right]_0^M$$

Vernachlässigen wir den ersten Summanden (der endlich bleibt), dann erhalten wir

$$\frac{\log(1+M^2-2\rho M)}{2}$$

und für $M \rightarrow \infty$ wird dieser Summand unendlich. Das war zu zeigen.

Literatur

Ballwieser, Wolfgang (1991), Unternehmensbewertung mit Hilfe von Multiplikatoren, *in* Rücke, ed., 'Aktuelle Fragen der Finanzwirtschaft und der Unternehmensbesteuerung', Linde, Wien, S. 47-66.

- Beckmann, C., Meister, J. & Meitner, M. (2003), 'Das Multiplikatorenverfahren in der kapitalmarktorientierten Unternehmensbewertungspraxis', *Finanz-Betrieb*, S. 103-105.
- Casella, George & Berger, Roger L. (2002), *Statistical inference*, 2. edn, Duxbury, Pacific Grove, USA.
- Christensen, Peter & Feltham, Gerald (2003), *Economics of Accounting*, Vol. 1 of *in Accounting Scholarship*, Kluwer, Massachusetts.
- Coenenberg, Adolf G. & Schultze, Wolfgang (2002), 'Das Multiplikatorverfahren in der Unternehmensbewertung: Konzeption und Kritik', *FinanzBetrieb*, S. 697-703.
- Damodaran, Aswath (2001), *Investment Valuation*, Wiley, New York.
- Daniel, Kent & Titman, Sheridan (1997), 'Evidence on the characteristics of cross sectional variation in stock returns', *The Journal of Finance*, S. 1-33.
- Ewert, Ralf & Wagenhofer, Alfred (2002), *Externe Unternehmensbewertung*, Springer Verlag, München.
- Fama, Eugene (1977), 'Risk-adjusted discount rates and capital budgeting under uncertainty', *Journal of Financial Economics*, 5, S. 3-24.
- Fama, Eugene F. (1996), 'Discounting under uncertainty', *Journal of Business*, 69, S. 415-428.
- Fama, Eugene F. & French, Kenneth R. (1992), 'The cross-section of expected stock returns', *The Journal of Finance*, 47, S. 427-465.
- Fama, Eugene F. & French, Kenneth R. (1993), 'Common risk factors in the returns on stocks and bonds', *Journal of Financial Economics*, 33, S. 3-56.
- Fazzari, Steven; Hubbard, R. Glenn & Petersen, Bruce G. (1988), 'Financing constraints and corporate investment', *Brooking Papers on Economic Activity*, S. 141-206.

- Feltham, Gerald A. & Ohlson, James A. (1995), 'Valuation and clean surplus accounting for operating and financial activities', *Contemporary Accounting Research*, 11, S. 689-731.
- Garmann, Mark B. & Ohlson, James A. (1981), *Journal of Finance*, 9, S. 271-280.
- Gordon, Myron J. (1955), 'The payoff period and the rate of profit', *Journal of Business*, 28, S. 258-260.
- Hachmeister, Dirk (1998), *Diskontierung bei Unsicherheit*, Vol. 1998/7 of *Diskussionsbeiträge des Fachbereichs für Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin*, FU Berlin, Berlin, S. 25-34.
- Harris, Robert & Marston, Felicia (1994), 'Value versus growth stocks: book-to-market, growth, and beta', *Financial Analysts Journal*, 50, S. 18-24.
- Hommel, Michael (1997), 'Internationale Bilanzrechtskonzeptionen und immaterielle Vermögensgegenstände', *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 49, S. 345-369.
- Kleekämper, H. (1995), 'Aktuelle Entwicklungen beim IASC', *Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis*, 47, S. 414-431.
- Kruschwitz, Lutz & Löffler, Andreas (2003), 'DCF (Part I)', <http://ssrn.com/abstract=389408>
- Löhnert, Peter & Böckmann, Ulrich (2001), Multiplikatorverfahren in der unternehmensbewertung, in Peemöller, ed., 'Praxishandbuch der Unternehmensbewertung', NWB Herne, Berlin, Kapitel 3, Teil E, S. 401-426.
- Moser, Ulrich & Auge-Dickhut, Stefanie (2003), 'Unternehmensbewertung: Der Informationsgehalt von Marktpreisabschätzungen auf Basis von Vergleichsverfahren', *FinanzBetrieb*, 5, S. 10-22.
- Ohlson, James A. (1980), 'Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy', *Journal of Accounting Research*, 18, S. 109-131.
- Penman, Stephen (1995), 'An evaluation of accounting rate-of-return', *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 6, S. 233-255.

- Richter, Frank, (1998), 'Unternehmensbewertung bei variablem Verschuldungsgrad', *Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft*, 10, S. 379-389.
- Richter, Frank & Herrmann, Volker (2002), 'Pricing with performance-controlled multiples', Beitrag zum Workshop Unternehmensbewertung an der Uni Hannover 2002.
- Rosenberg, B., Reid, K. & Lanstein, R. (1985), 'Persuasive evidence of market inefficiency', *Journal of Portfolio Management*, 11, S. 9-16.
- Ross, Stephen A. (1976), 'The arbitrage theory of capital asset pricing', *Journal of Economic Theory*, 13, S. 341-360.
- Sattler, Ralf (1994), *Renditeanomalien am deutschen Aktienmarkt*, Shaker Verlag, Aachen, S. 118-149.
- Schildbach, Thomas (1998), Rechnungslegung nach US-GAAP - ein Fortschritt für Deutschland?, in W. Ballwieser & T. Schildbach, eds, 'Rechnungslegung und Steuern international', Düsseldorf, S. 55-81.
- Schildbach, Thomas ((2000). 'Ein fast problemloses DCF-Verfahren zur Unternehmensbewertung', *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 52, S. 707-723.
- Schildbach, Thomas (2002), 'IAS als Rechnungslegungsstandards für alle', *Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis*, 54, S. 263-278.
- Wallmeier, Martin (1999), 'Kapitalkosten und Finanzierungsprämissen', *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 69, S. 1473-1490.
- Wallmeier, Martin (2000), 'Determinanten erwarteter Renditen am deutschen Aktienmarkt - eine empirische Untersuchung anhand ausgewählter Kennzahlen', *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 52, S. 27-57.