Investitionsneutrale Steuersysteme unter Unsicherheit

Andreas Löffler und Dirk Schneider*

27. September 1999

Inhaltsverzeichnis

*Freie Universität Berlin, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft, Boltzmannstr. 20, 14195 Berlin. email: andras@zedat.fu-berlin.de. Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung.

Zusammenfassung

Löffler (1999) nutzte Wengers Idee der Zinskorrektur einer Gewinnsteuer, um investitionsneutrale Steuersysteme unter Sicherheit sowie einem zeitabhängigen Steuersatz zu charakterisieren. Die Untersuchungen werden in der vorliegenden Arbeit auf den Fall der Unsicherheit in einem zeitdiskreten Modell verallgemeinert.

Keywords: arbitragefreie Bewertung, äquivalentes Martingalmaß, Investitionsneutralität, Steuern, Unsicherheit.

1 Einleitung

Seit geraumer Zeit werden investitionsneutrale Steuersysteme im Modellrahmen einer sicheren Umwelt diskutiert. Die bekanntesten Varianten sind dabei die Cash–flow-Steuer und die Besteuerung des ökonomischen Gewinns. Die Cash–flow–Steuer, die auf Brown (1948) zurückgeht, unterstellt eine sofortige Abzugsfähigkeit der Anschaffungsausgaben, und Bemessungsgrundlage sind die Cash–flows der Investition. Bei der Besteuerung des ökonomischen Gewinns, die von Preinreich (1951) und Johansson (1969) entwickelt wurde, entsprechen die gewährten Abschreibungen in jeder Periode der Ertragswertabschreibung, d.h. der Differenz der Barwerte des Projektes in aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. Auf Samuelson (1964) geht ein erster Beweisversuch zurück, daß ausschließlich die Besteuerung des ökonomischen Gewinns den Kapitalwert einer Investition unverändert läßt.

Boadway & Bruce (1984) entwickelten ein allgemeines, auf einem neoklassischen Investitionsmodell basierendes Modell, aus dem eine unendliche Anzahl investitionsneutraler Steuersyteme mit einem im Zeitablauf konstanten Steuersatz abgeleitet werden kann, darunter auch die beiden vorgenannten Systeme. König (1997) übertrug das eher volkswirtschaftlich orientierte Modell von Boadway & Bruce (1984) in ein einfaches betriebswirtschaftliches Barwertmodell und erarbeitete zudem einen Ansatz zur Konstruktion investitionsneutraler Steuersysteme in einer unsicheren Umwelt. Allerdings unterstellt König (1997) die Annahme risikoneutraler Investoren.

Von Löffler (1999) wurde die Frage beantwortet, wie investitionsneutrale Steuersysteme auszugestalten sind, wenn der Steuersatz im Zeitablauf variabel ist und die Steuerbemessungsgrundlage um einen Anteil kalkulatorischer Zinsen korrigiert wird. Die Idee einer derartigen Modifikation der Bemessungsgrundlage ist bereits bei Wenger (1983) zu finden.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß der Ansatz von Löffler (1999) tragfähig genug ist, um den Fall unsicherer Rückflüsse (in einem zeitdiskreten Modell) zu behandeln. Bei der Bewertung der Investitionen soll dabei im Gegensatz zum Ansatz von König (1997) nicht auf die Annahme der Risikoneutralität von Investoren zurückgegriffen werden. Wie in Löffler (1999) wird eine Tauschwirtschaft unterstellt. Es gibt keine Differenzierung nach Unternehmen und Eigentümern, da wir die Produktionsebene völlig ausblenden. Die modellierte Steuer entspricht einer Einkommensteuer der Investoren.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Zunächst erfolgt eine Charakterisierung der unsicheren Umwelt, des Steuersystems, des Kapitalmarktes und der auf dem Kapitalmarkt gehandelten Finanzinvestitionen, womit das verwendete Modell vollständig spezifiziert ist. Grundlage für die folgende Herleitung der Bewertungsgleichung für den NPV nach Steuern von Sachinvestitionen bildet die Begründung der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes in der betrachteten unsicheren Umwelt mit Steuern. Schließlich wird die Bewertungsgleichung umgewandelt in eine Beziehung zwischen dem NPV vor Steuern und dem NPV nach Steuern, und anhand dieser Beziehung gelingt es, verschiedene investitionsneutrale Steuersysteme zu spezifizieren.

2 Grundbegriffe

2.1 Charakterisierung der unsicheren Umwelt

Betrachtet wird eine zeitdiskrete unsichere Umwelt mit den Zeitpunkten $t = 0, 1, \ldots, T$. Das verwendete Unsicherheitsmodell kann man sich graphisch als Wahrscheinlichkeitsbaum mit insgesamt endlich vielen Knoten und unterschiedlich vielen Verzweigungen in jedem Knoten veranschaulichen. Wir werden jedoch im folgenden nicht voraussetzen, daß es nur endlich viele mögliche Zustände in der Zukunft geben kann.

Der Wahrscheinlichkeitsraum sei durch das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Die Gesamtheit aller möglichen Ereignisse wird daher durch die σ-Algebra $\mathcal{F}$ beschrieben. Man spricht auch von der Gesamtheit der verfügbaren Information.[1] Die zu einem beliebigen Zeitpunkt t für einen Investor verfügbare Information ist durch die Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ beschrieben, wobei die verfügbare Information im Zeitablauf zunimmt, d.h. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T$, weil jeder Investor weiß, welche Zustände in der Vergangenheit eingetreten sind. $\mathcal{F}_0$ besteht nur aus den Mengen $\emptyset$ und Ω. $\mathcal{F}_T$ ist identisch mit $\mathcal{F}$. Eine Zufallsvariable Z_t ist adaptiert, wenn sie für jeden Zeitpunkt t $\mathcal{F}_t$-meßbar ist.[2]

Jedem Investor ist bekannt, welche Zustände an jedem beliebigen Zeitpunkt $t = 1, \ldots, T$ in jedem beliebigen Knoten möglich sind und welchen Wert die Zufallsvariable Z_t bei jedem Zustand jeweils annimmt.[3] Andererseits ordnet jeder Investor aber dem Eintritt der einzelnen Zustände verschieden hohe Wahrscheinlichkeiten zu. Jeder Investor hat also ein subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß P. Unter diesem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß bildet er im Zeitpunkt t bezüglich der Zufallsvariable Z_s mit $s \geq t$ die (bedingte) Erwartung $E(Z_s|\mathcal{F}_t)$.

Am vorliegenden Kapitalmarkt seien $J < \infty$ verschiedene Wertpapiere, auch Finanzinvestitionen genannt, verfügbar, die ausschließlich im Zeitpunkt $t = 0$ (heute) gehandelt werden.[4] Sie verbriefen jeweils in den Zeitpunkten $t = 1, 2, \ldots, T$ Ansprüche auf unsichere Cash–flows

[1] Vergleiche dazu Irle (1998), S. 36 ff.

[2] Z_t kann im folgenden beispielsweise den Cash–flow, den Buchwert, die Abschreibung, den Gewinn, die Steuerbemessungsgrundlage oder die Steuerschuld bezeichnen.

[3] Dies folgt aus der Adaptiertheit, da Z_t ja $\mathcal{F}_t$–meßbar ist.

[4] Auf die Bedeutung dieser Annahme wird auf Seite 7 näher eingegangen.

(Dividenden), wobei der Cash–flow des j-ten Wertpapiers ($j = 1, 2, \ldots, J$) im Zeitpunkt t mit $\widetilde{X}_{j,t}$ bezeichnet wird. Wir nehmen an, daß sich unter diesen Wertpapieren ein risikoloses Wertpapier mit zeitkonstantem Zins r_f befindet.

Aus den verfügbaren Wertpapieren können beliebige Portfolios zusammengestellt werden. Ein solches Portfolio wird durch den Mengenvektor $(n_1, \ldots, n_J)$ beschrieben, wobei n_j die Menge des j-ten Titels im Portfolio symbolisiert. Im Zeitpunkt t belaufen sich die Ansprüche aus dem Portfolio dann auf

$$\widetilde{X}_t = \sum_{j=1}^{J} n_j \widetilde{X}_{j,t}. \tag{1}$$

Von Interesse sei eine spezielle Sachinvestition mit den Cash–flows $\widetilde{X}_1,\ \widetilde{X}_2, \ldots,\ \widetilde{X}_T$. Unser Ziel ist es, diese Sachinvestition unter Einbeziehung von Steuern fair zu bewerten. Dies soll durch Duplizierung der Cash–flows der zu bewertenden Sachinvestition durch ein Portfolio aus den am Kapitalmarkt verfügbaren Wertpapieren geschehen. Hierzu ist zuerst eine genaue Beschreibung des Steuersystems und des Kapitalmarktes erforderlich.

2.2 Charakterisierung des Steuersystems

Ein Steuersystem wird überlicherweise durch das Steuersubjekt, das Steuerobjekt und die Steuerschuld beschrieben.[5] Wir werden ebenfalls dieser einfachen Darstellung folgen.

Steuersubjekt und Steuerobjekt. Steuersubjekt ist der Investor, dem die Cash–flows der von ihm gehaltenen Investition – egal ob Wertpapier oder Sachinvestition – zufließen. Die Rückflüsse der betreffenden Investition bilden das Steuerobjekt.

Steuerbemessungsgrundlage. Zur Ableitung und zum Verständnis der Steuerbemessungsgrundlage werden die Begriffe "Abschreibung" und "Gewinn" benötigt. Diese werden auf den Begriff des "Buchwertes" einer Investition zurückgeführt. Wir gehen dabei davon aus, daß jeder Investition in jedem Zeitpunkt ein Buchwert $\widetilde{B}_t$ zugeordnet werden kann. Dieser Buchwert kann unsicher sein und ist also eine (adaptierte) Zufallsvariable mit dem Maß einer Währungseinheit. Der Buchwert spiegelt den Wert der Investition aus steuerlichen Gesichtspunkten wider. Der Buchwert im Zeitpunkt null ist aufgrund der Adaptiertheit eine Zahl und daher sicher. Die Buchwerte des Wertpapiers j entsprechen damit einer Zahlungsreihe $\mathrm{B}_{j,0},\ \widetilde{B}_{j,1}\ \ldots,\ \widetilde{B}_{j,T-1}$. Im Zeitpunkt n sei der Buchwert einer jeden Investition null. Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend damit, daß jede Investition vollständig abgeschrieben wird. Wir benötigen im folgenden keine weiteren Annahmen an den Buchwert einer Investition; die Ähnlichkeit zum betrieblichen Rechnungswesen mit seiner Vielzahl von gesetzlichen Regelungen ist daher nur bedingt gegeben. Daher sprechen wir auch vom "verallgemeinerten Buchwert".

Mittels der Buchwerte definiert man die (verallgemeinerte) Abschreibung (depreciation) einer Investition wie in Definition 1 angegeben.

[5]Vergleiche etwa Kruschwitz (1998b), S. 99.

Definition 1 (verallgemeinerte Abschreibung) *Die verallgemeinerte Abschreibung des j-ten Wertpapiers im Zeitpunkt $t > 0$ ist die Differenz der verallgemeinerten Buchwerte, d.h.*

$$\widetilde{D}_{j,t} = \widetilde{B}_{j,t-1} - \widetilde{B}_{j,t}. \tag{2}$$

Die Abschreibung eines Portfolios aus mehreren Wertpapieren ergibt sich aus den Einzelabschreibungen entsprechend der Beziehung

$$\widetilde{D}_t = \sum_{j=1}^{J} n_j \widetilde{D}_{jt}.$$

Entsprechend beträgt die Abschreibung einer Sachinvestition

$$\widetilde{D}_t = \widetilde{B}_{t-1} - \widetilde{B}_t. \tag{3}$$

Wir verzichten auf die Unterscheidung zwischen den Begriffen "Abschreibung" und "Zuschreibung" und sprechen unabhängig davon, ob $D_{j,t}$ bzw. D_t positiv oder negativ ist, generell ausschließlich von Abschreibungen. Im Einklang mit der steuerrechtlich orientierten Literatur[6] wird der Gewinn einer Investition wie in Definition 2 angegeben definiert.

Definition 2 (Gewinn) *Der Gewinn $\widetilde{G}_{j,t}$ des j-ten Wertpapiers im Zeitpunkt $t > 0$ ist die Differenz zwischen dem Cash-flow und der (verallgemeinerten) Abschreibung, d.h.*

$$\widetilde{G}_{j,t} = \widetilde{X}_{j,t} - \widetilde{D}_{j,t}. \tag{4}$$

Der Gewinn eines Portfolios ergibt sich aus den Einzelgewinnen gemäß

$$\widetilde{G}_t = \sum_{j=1}^{J} n_j \widetilde{G}_{jt}.$$

Entsprechend beträgt der Gewinn einer Sachinvestition

$$\widetilde{G}_t = \widetilde{X}_t - \widetilde{D}_t. \tag{5}$$

Bei der Steuerbemessungsgrundlage (tax base) greifen wir auf eine bereits von Wenger[7] geäußerte Idee der Zinskorrektur zurück. Nicht der Gewinn, sondern der um die Zinsen korrigierte Betrag unterliegt der Besteuerung. In Anlehnung an Löffler (1999) werden wir gestatten, daß dieser Korrekturbetrag von der Zeit abhängig ist. Daher sprechen wir im folgenden auch von einer "zinskorrigierten Gewinnsteuer".

[6]Vergleiche Siegel & Bareis (1999), S.70 oder im deutschen Einkommensteuerrecht den § 4 Abs. 1 EStG.
[7]Vergleiche Wenger (1983).

Definition 3 (Steuerbemessungsgrundlage) *Die Steuerbemessungsgrundlage* $\widetilde{\mathrm{TB}}_{j,t}$ *des* j*-ten Wertpapiers im Zeitpunkt* $t > 0$ *ist durch die Differenz zwischen dem Gewinn* $\widetilde{G}_{j,t}$ *und einem zeitabhängigen, aber deterministischen Anteil* $1 - \alpha_t$ *der Zinsen auf den Buchwert* $\widetilde{B}_{j,t-1}$ *der Vorperiode gegeben, d.h.*

$$\widetilde{\mathrm{TB}}_{j,t} = \widetilde{G}_{j,t} - (1 - \alpha_t) \cdot r_f \widetilde{B}_{j,t-1}. \tag{6}$$

Die Steuerbemessungsgrundlage eines Portfolios ergibt sich aus den einzelnen Bemessungsgrundlagen gemäß

$$\widetilde{\mathrm{TB}}_t = \sum_{j=1}^{J} n_j \widetilde{\mathrm{TB}}_{j,t}.$$

Entsprechend gilt für die Steuerbemessungsgrundlage einer Sachinvestition

$$\widetilde{\mathrm{TB}}_t = \widetilde{\Pi}_t - (1 - \alpha_t) \cdot r_f \widetilde{B}_{t-1}. \tag{7}$$

Die Gleichungen (6) und (7) gelten unabhängig davon, ob die Steuerbemessungsgrundlage positiv oder negativ ist, d.h. es wird ein vollständiger und sofortiger Verlustausgleich unterstellt.

Weil es sich bei den Zinsen $r_f \widetilde{B}_{t-1}$ um kalkulatorische Zinsen handelt, mindern sie nicht den Gewinn, sondern lediglich die Steuerbemessungsgrundlage. Der Abzugsbetrag im Zeitpunkt t in Höhe von $(1 - \alpha_t) \cdot r_f \widetilde{B}_{t-1}$ wird durch die folgenden drei Größen determiniert

- den Anteil $1 - \alpha_t$: Bei dem Anteil $1 - \alpha_t$ handelt es sich nicht um eine Zufallsvariable. Er schwankt zwar mit der Zeit, jedoch ist seine Entwicklung vollständig im voraus bekannt.[8] Desweiteren ist der Anteil für sämtliche Investitionen identisch.
- den Buchwert $\widetilde{B}_{t-1}$: Der Buchwert des Zeitpunktes $t - 1$ ist im Zeitpunkt t eine sichere Information. Man beachte aber, daß der Buchwert im Gegensatz zum Anteil $1 - \alpha_t$ im Zeitpunkt $t = 0$ eine Zufallsvariable ist.
- den sicheren Zinssatz r_f.

Damit sind sämtliche Determinanten des für den Zeitpunkt t zulässigen Abzugsbetrages bereits im Zeitpunkt $t - 1$ sicher bekannt. Aufgrund des Abzugsbetrages spricht man von einer zinskorrigierten Gewinnsteuer.

Insgesamt läßt sich die Steuerbemessungsgrundlage noch in zwei weiteren Formen darstellen, und die lauten für das j-te Wertpapier

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{TB}}_{j,t} &= \widetilde{X}_{j,t} - \widetilde{D}_{j,t} - (1 - \alpha_t) \cdot r_f \widetilde{B}_{j,t-1} \\
&= \widetilde{X}_{j,t} - (\widetilde{B}_{j,t-1} - \widetilde{B}_{j,t}) - (1 - \alpha_t) \cdot r_f \widetilde{B}_{j,t-1} \\
&= \widetilde{X}_{j,t} + \widetilde{B}_{j,t} - (1 + r_f \cdot (1 - \alpha_t)) \cdot \widetilde{B}_{j,t-1}
\end{aligned} \tag{8}$$

[8] In Wengers Originalarbeit war $\alpha_t = 0$, es wurden also sämtliche Zinsen zum Abzug bei der Bemessungsgrundlage zugelassen. Löffler (1999) machte als erster die abzugsfähigen Zinszahlungen von der Zeit abhängig, um die Veränderung von Steuersätzen in die Analyse einbeziehen zu können.

und für ein Portfolio

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{TB}}_t &= \widetilde{X}_t - \widetilde{D}_t - (1-\alpha_t)\cdot r_f \widetilde{B}_{t-1} \\ &= \widetilde{X}_t - (\widetilde{B}_{t-1} - \widetilde{B}_t) - (1-\alpha_t)\cdot r_f \widetilde{B}_{t-1} \\ &= \widetilde{X}_t + \widetilde{B}_t - (1 + r_f\cdot(1-\alpha_t))\cdot \widetilde{B}_{t-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Steuerschuld. Die Steuer wird erst von Zeitpunkt $t = 1$ an erhoben. Der Zahlungsstrom im Zeitpunkt $t = 0$ unterliegt keiner Besteuerung. Da nur in $t = 0$ der Handel von Wertpapieren zulässig ist, wird damit die Besteuerung des Handels ausgeschlossen, was die Untersuchung erheblich vereinfacht. Die Bemessungsgrundlage wird proportional besteuert. Der Steuersatz τ_t wird – ebenso wie der Anteil α_t – als zeitabhängig und sicher angenommen. Damit berechnet sich die Steuerschuld des j-ten Wertpapiers zu

$$\widetilde{T}_{j,t} = \tau_t \cdot \widetilde{\mathrm{TB}}_{j,t} \tag{10}$$

und analog die Steuerschuld T_t eines Portfolios im Zeitpunkt t zu

$$\widetilde{T}_t = \tau_t \cdot \widetilde{\mathrm{TB}}_t, \tag{11}$$

wobei für die Steuerbemessungsgrundlagen die vorher angegebenen Ausdrücke (6) bis (9) einzusetzen sind.

2.3 Charakterisierung des Kapitalmarktes und äquivalentes Martingalmaß

Dem j–ten Wertpapier sei weiter ein (zufälliger) Wert $\widetilde{V}_{j,t}$ im Zeitpunkt $t \geq 0$ zugeordnet. Der Wert sei ex Dividende, also nach Zahlung des Cash–flows, zu verstehen. Der Wert eines Portfolios sei adaptiert, damit ist $\widetilde{V}_{j,t}$ $\mathcal{F}_t$–meßbar. Da die Wertpapiere ausschließlich im Zeitpunkt 0 gehandelt werden, kann nur der Wert $V_{j,0}$ als ein Preis interpretiert werden. Der Preis des j–ten Wertpapiers in $t = 0$ werde auch mit p_j^τ bezeichnet. Im Zeitpunkt $t = T$ ist jedes Wertpapier wertlos, da keine Cash–flows mehr gezahlt werden.

An den Kapitalmarkt sind zwei Anforderungen zu stellen: Wertadditivität und Arbitragefreiheit.[9] Die Bedingung der Arbitragefreiheit werden wir dabei zunächst für einen Markt formulieren, in dem keine Steuern erhoben werden. Anschließend zeigen wir, daß sie auch bei Existenz einer Steuer erfüllt ist. Ein entsprechendes Vorgehen erübrigt sich bei der Einführung des Wertadditivitätstheorems, da im Zeitpunkt $t = 0$ keine Steuern erhoben wurden.

Annahme 1 (Wertadditivität) *Der Preis p^τ eines Portfolios $(n_1, \ldots, n_J)$ ergibt sich aus der Beziehung*

$$p^\tau = \sum_{j=1}^{J} n_j \cdot p_j^\tau. \tag{12}$$

[9] Zu den entsprechenden Annahmen im Ein–Perioden–Modell siehe "Wertadditivitäts– und Dominanztheorem" bei Kruschwitz (1998a), S. 44 ff.

Wir bezeichnen eine Handelsstrategie als selbstfinanzierend, wenn während der Laufzeit weder Einzahlungen noch Auszahlungen aus dem gehandelten Portfolio getätigt werden.[10] Dann fordern wir

Annahme 2 (Arbitragefreiheit des Kapitalmarktes) *Die Steuern seien zunächst vernachlässigt* ($\tau_t = 0$)*. Dann ist der Markt arbitragefrei, d.h. jede selbstfinanzierende Handelsstrategie mit nicht-negativem Rückfluß im Zeitpunkt T hat einen positiven Preis.*

Die Arbitragefreiheit impliziert, daß der Preis eines Portfolios, das die Zahlungsreihe einer Sachinvestition perfekt kopiert, mit dem Preis der Sachinvestition übereinstimmen muß. Aus der Annahme der Arbitragefreiheit folgt weiter, daß ein zu dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß P ein äquivalentes risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß Q, auch äquivalentes Martingalmaß genannt, existiert.[11] Die unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß gebildeten Erwartungen werden im folgenden stets mit $E_Q[Z_s|\mathcal{F}_t]$ abgekürzt. Bei Verwendung des äquivalenten Martingalmaßes anstelle des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes stellt der mit dem risikolosen Zins diskontierte Wert $\widetilde{V}_{j,t}$ eines Wertpapiers unter Q stets ein Martingal dar ("Fundamentalsatz der Preistheorie"[12])

$$V_{jt} = E_Q\left[\left.\frac{\widetilde{X}_{j,t+1} + \widetilde{V}_{j,t+1}}{1 + r_f}\right| \mathcal{F}_t\right]. \tag{13}$$

Aus dem Fundamentalsatz der Preistheorie folgt, daß der Wert eines Portfolios (und im Zeitpunkt $t = 0$ damit auch der Preis) gleich der Summe der diskontierten unter Q erwarteten Entnahmen ist:

Lemma 1 (Wert einer Finanzinvestition) *Für den Wert des j–ten Wertpapiers im Zeitpunkt t gilt*

$$\widetilde{V}_{j,t} = \sum_{k=t+1}^{T} \frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,k}|\mathcal{F}_t]}{(1 + r_f)^{k-t}}.$$

Insbesondere gilt also im Zeitpunkt $t = 0$

$$p_j^\tau = V_{j,0} = \sum_{t=1}^{T} \frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,t}]}{(1 + r_f)^t}. \tag{14}$$

[10] Diese Begriffe wie auch die nachfolgende Annahme werden in Irle (1998), S. 59 formal präzise formuliert.

[11] Beispielsweise Irle (1998), Satz 3.19, S. 71ff.

[12] Dieser Fundamentalsatz geht auf die Arbeit Harrison & Kreps (1979) zurück. In der hier zitierten Form wurde er zum ersten Mal von Back & Pliska (1991) bewiesen. Ein eleganter Beweis geht auf Kabanov und Kramkov zurück, siehe Irle (1998), S. 105ff.

Beweis. *Aus Gleichung (13) folgt wegen des Gesetzes der iterierten Erwartung*[13] *für* $t \leq k$

$$\begin{aligned} E_Q[\widetilde{V}_{j,k}|\mathcal{F}_t] &= E_Q\left[\frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,k+1}+\widetilde{V}_{j,k+1}|\mathcal{F}_k]}{1+r_f}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,k+1}+\widetilde{V}_{j,k+1}|\mathcal{F}_t]}{1+r_f} \\ &= \frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,k+1}|\mathcal{F}_t]+E_Q[\widetilde{V}_{j,k+1}|\mathcal{F}_t]}{1+r_f}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich

$$E_Q[\widetilde{V}_{j,t}|\mathcal{F}_t] = \sum_{k=t+1}^{T} \frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,k}|\mathcal{F}_t]}{(1+r_f)^{k-t}}.$$

Wegen der Adaptiertheit[14] *von* $\widetilde{V}_{j,t}$ *gilt aber* $E_Q[\widetilde{V}_{j,t}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{V}_{j,t}$. *Damit ist das Lemma bewiesen.* ■

Wir werden ebenso voraussetzen, daß der Kapitalmarkt vollständig ist. Im Gegensatz zur Theorie ohne Steuern ist hier zusätzlich zu fordern, daß auch die Buchwerte eines Portfolios dupliziert werden können. Die letzte Eigenschaft kann leicht damit begründet werden, daß die Steuerzahlungen sich aus den Buchwerten ermitteln und selbst handelbare Zahlungen sein müssen.

Annahme 3 (Vollständigkeit des Kapitalmarktes) *Die Steuern seien vorerst vernachlässigt* ($\tau_t = 0$). *Für eine beliebige Sachinvestition gebe es eine Handelsstrategie der* J *Wertpapiere, die die Zahlungen der Sachinvestition dupliziert. Ebenso sei es möglich, die Buchwerte eines Portfolios* $\widetilde{B}_t$ *zu duplizieren.*

Die Vollständigkeit des Kapitalmarktes ist Voraussetzung für die Eindeutigkeit des Systems der Preise reiner Wertpapiere bzw. der Eindeutigkeit eines Martingalmaßes Q.

2.4 Charakterisierung von Finanzinvestitionen

In der vorstehend beschriebenen Umwelt gibt es zum einen J Wertpapiere (Finanzinvestitionen) und zum anderen Sachinvestitionen. Finanzinvestitionen unterscheiden sich in dieser Arbeit von Sachinvestitionen darin, daß bei Finanzinvestitionen ihr Wert vor Steuern im Zeitablauf immer identisch dem Buchwert ist, wohingegen bei Sachinvestitionen der Wert der Sachinvestition auch vom Buchwert abweichen kann. Diese Beziehung ist in der Annahme 4 angegeben.

Annahme 4 (Finanzinvestition) *Für jede Finanzinvestition gilt in jedem Zeitpunkt* $t \geq 0$

$$\widetilde{B}_{j,t} = \widetilde{V}^{\tau}_{j,t}. \tag{15}$$

[13] siehe Irle (1998), S. 42, Bedingung (iii).
[14] siehe Irle (1998), S. 42, Bedingung (ii).

Nach Einsetzen von Gleichung (15) in Gleichung (13) und Umstellen erhält man die eine Finanzinvestition kennzeichnende Beziehung

$$E_Q[\widetilde{B}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t] = (1+r_f)\widetilde{B}_{j,t} - E_Q[\widetilde{X}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t] \tag{16}$$

zwischen dem Buchwert im Zeitpunkt t und dem erwarteten Buchwert im Zeitpunkt $t+1$. Diese Gleichung wird noch verständlicher, wenn man den Buchwert der Finanzinvestition als "Kontostand eines Sparbuchs" auffaßt und folgende Überlegung anstellt: In jeder Periode finden zwei Kontobewegungen statt. Zum einen werden dem Konto Zinserträge gutgeschrieben, und zum anderen wird eine Abhebung vorgenommen. Die Zinserträge und –aufwendungen orientieren sich bei Finanzinvestitionen am Produkt aus Buchwert und risikolosem Zins, soweit man die Erwartungen des äquivalenten Martingalmaßes zugrundelegt (vgl. Abschnitt 2.3). Vom Zeitpunkt t aus gesehen sieht die Kontoentwicklung wie folgt aus:

	Buchwert Anfang Periode $t+1$	$\widetilde{B}_{j,t}$
$+$	(sicherer) Zinsertrag für Periode $t+1$	$r_f \cdot \widetilde{B}_{j,t}$
$-$	erwarteter Cash–flow für Periode $t+1$	$E_Q[\widetilde{X}_{j,t+1}\|\mathcal{F}_t]$
$=$	erwarteter Buchwert Ende Periode $t+1$	$E_Q[\widetilde{B}_{j,t+1}\|\mathcal{F}_t]$

Für Sachinvestitionen ist der durch Gleichung (16) beschriebene Zusammenhang nicht zwingend erfüllt.

Für die zinskorrigierte Gewinnsteuer werden wir nun die Steuerschuld einer Finanzinvestition ermitteln.

Lemma 2 (Steuerschuld einer Finanzinvestition) *Für die zinskorrigierte Gewinnsteuer berechnet sich der Erwartungswert der Steuerschuld der j-ten Finanzinvestition unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q gemäß der Vorschrift*

$$E_Q[\widetilde{T}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t] = \alpha_{t+1}\tau_{t+1} r_f \widetilde{B}_{j,t}. \tag{17}$$

Beweis. *Gleichung (17) folgt sofort durch Einsetzen von Gleichung (16) in Gleichung (7):*

$$\begin{aligned}
E_Q[\widetilde{T}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t] &= \tau_{t+1} \cdot E_Q[\widetilde{\mathrm{TB}}_{t+1}|\mathcal{F}_t] \\
&= \tau_{t+1} \cdot E_Q\left[\widetilde{X}_{j,t+1} - \widetilde{D}_{j,t+1} - (1-\alpha_{t+1}) \cdot r_f\, \widetilde{B}_{j,t} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \tau_{t+1} \cdot E_Q\left[(1+r_f) \cdot \widetilde{B}_{j,t} - \widetilde{B}_{j,t+1} - (\widetilde{B}_{j,t} - \widetilde{B}_{j,t+1}) - (1-\alpha_{t+1}) \cdot r_f\, \widetilde{B}_{j,t} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \tau_{t+1} \cdot E_Q\left[\alpha_{t+1} r_f\, \widetilde{B}_{j,t} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \alpha_{t+1}\tau_{t+1} r_f \cdot E_Q[\widetilde{B}_{j,t}|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß $\widetilde{B}_{j,t}$ adaptiert ist, ergibt sich schließlich die Behauptung. ■

3 Investitionsneutrale Steuersysteme

3.1 Äquivalentes Martingalmaß unter Steuern

In diesem Abschnitt wird bewiesen, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß Q sich auch bei Einbeziehung von Steuern als äquivalentes Martingalmaß erweist, sofern der risikolose Zins r_f durch den versteuerten Zins $(1-\alpha_t\tau_t)\ r_f$ ersetzt wird. Dazu muß aber der Weg des Abschnittes 2.3 beschritten werden. Es ist also zu zeigen, daß die Arbitragefreiheit bei Besteuerung und die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes logisch gleichwertige Annahmen darstellen. Zuerst gilt folgende Aussage

Lemma 3 (Arbitragefreiheit bei Steuern) *Unter den gemachten Annahmen gibt es keine Handelsarbitrage nach Steuern. Wenn man also eine versteuerte Arbitrage realisieren kann, dann muß es auch eine unversteuerte Arbitrage geben.*

Da der Markt mit einer Steuer arbitragefrei ist, kann man die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes erwarten. Wir sind sogar in der Lage, dieses Maß explizit anzugeben:

Lemma 4 (Äquivalentes Martingalmaß bei Steuern) *Der mit dem versteuerten Zinssatz $(1-\alpha_t\tau_t)\ r_f$ diskontierte Wert der j–ten Finanzinvestition ist unter Einbeziehung von Steuern ein Martingal, d.h. es gilt die rekursive Gleichung*

$$\widetilde{V}^{\tau}_{j,t} = \frac{E_Q[(\widetilde{X}_{j,t+1}-\widetilde{T}_{j,t+1})+\widetilde{V}^{\tau}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t]}{1+(1-\alpha_{t+1}\tau_{t+1})\ r_f}. \tag{18}$$

Beweis. *Da auch der risikolose Titel versteuert wird, sinkt die Rendite im Zeitpunkt t von r_f auf $(1-\alpha_t\tau_t)\ r_f$. Wir betrachten nun den Erwartungswert des Ausdrucks*

$$\widetilde{X}_{j,t+1}-\widetilde{T}_{j,t+1}$$

und setzen sowohl Gleichung (16) als auch Gleichung (17) ein. Das führt auf

$$\begin{aligned} E[\widetilde{X}_{j,t+1}-\widetilde{T}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t] &= (1+r_f)\ \widetilde{B}_{j,t} - E_Q[\widetilde{B}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t] - \alpha_{t+1}\tau_{t+1}r_f\ \widetilde{B}_{j,t} \\ &= \big(1+r_f\cdot(1-\alpha_{t+1}\tau_{t+1})\big)\cdot\widetilde{B}_{j,t} - E_Q[\widetilde{B}_{j,t+1}|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Wir berücksichtigen, daß für Finanzinvestitionen Buchwerte und Werte vor Steuern zusammenfallen (Annahme 4) und erhalten das Ergebnis. ■

Wir werden dieses Lemma benutzen, um eine Preisgleichung herzuleiten.

Lemma 5 (Preis einer Finanzinvestition) *Für den Preis der j–ten Finanzinvestition gilt*

$$p^{\tau}_j = V^{\tau}_{j,0} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{E_Q\big[\big(1+r_f\cdot(1-\alpha_{t+1}\tau_{t+1})\big)\cdot\widetilde{B}_{j,t}-\widetilde{B}_{j,t+1}\big]}{\prod_{k=1}^{t+1}\big(1+r_f\cdot(1-\alpha_k\tau_k)\big)}.$$

Beweis. *Wir führen den Beweis analog zum Beweis von Lemma 1. Aus Gleichung (18) folgt wegen des Gesetzes der iterierten Erwartung für $t \leq k$ die Beziehung*

$$\begin{aligned} E_Q[\widetilde{V}^{\tau}_{j,k}|\mathcal{F}_t] &= E_Q\left[\frac{E_Q[(\widetilde{X}_{j,k+1} - \widetilde{T}_{j,k+1}) + \widetilde{V}^{\tau}_{j,k+1}|\mathcal{F}_k]}{1 + (1 - \alpha_{k+1}\tau_{k+1})\, r_f} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{E_Q[(\widetilde{X}_{j,k+1} - \widetilde{T}_{j,k+1}) + \widetilde{V}^{\tau}_{j,k+1}|\mathcal{F}_t]}{1 + (1 - \alpha_{k+1}\tau_{k+1})\, r_f}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich

$$E_Q[\widetilde{V}^{\tau}_{j,0}] = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{E_Q[\widetilde{X}_{j,t+1} - \widetilde{T}_{j,t+1}]}{\prod_{k=1}^{t+1}(1 + (1 - \alpha_k\tau_k)\, r_f)}.$$

Es gilt

$$V_{j,0} = p^{\tau}_j.$$

Des weiteren kann man $\widetilde{X}_{j,t+1} - \widetilde{T}_{j,t+1}$ mit Hilfe der Gleichungen (16) und (17) weiter zu

$$E_Q[\widetilde{V}^{\tau}_{j,0}] = \big(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_{t+1}\tau_{t+1})\big) \cdot \widetilde{B}_{j,t} - \widetilde{B}_{j,t+1}$$

vereinfachen. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Mit Hilfe des Lemmas können wir nun sehr leicht Sachinvestitionen bewerten.

Satz 1 (Preis einer Sachinvestition) *Betrachten wir eine beliebige Sachinvestition mit den Rückflüssen $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \dots, \widetilde{X}_T$ sowie den Buchwerten $\mathrm{B}_0, \widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_{T-1}$, und nehmen wir an, daß sowohl die Rückflüsse als auch die Buchwerte am Kapitalmarkt dupliziert werden können. Dann hat diese Sachinvestition den Preis*

$$p^{\tau} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{E_Q[\widetilde{X}_{t+1} - \widetilde{T}_{t+1}]}{\prod_{k=1}^{t+1}\big(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_k\tau_k)\big)}. \tag{19}$$

Beweis. *Die Sachinvestition hat im Zeitpunkt $t+1$ einen Rückfluß nach Steuern in Höhe von $\widetilde{X}_{t+1} - \widetilde{T}_{t+1}$. Jedes Portfolio aus Finanzinvestitionen, das in allen Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ die gleichen Rückflüsse wie eine Sachinvestition aufweist, muß den gleichen Preis wie die Sachinvestition besitzen (Arbitragefreiheit).*

Ein solches Portfolio läßt sich in der Tat konstruieren. Dazu haben wir nur die Buchwerte der Finanzinvestition anzugeben, da dann nach Annahme 4 die Cash–flows festgelegt sind. Die Buchwerte werden retrograd ermittelt, d.h. Ausgangspunkt ist der Buchwert im Zeitpunkt T, für den annahmegemäß $B_T = 0$ gilt. Ist der Buchwert $\widetilde{B}_{t+1}$ für ein $t < T$ ermittelt, dann wählen wir nun ein Portfolio aus Finanzinvestitionen derart, daß es einen Buchwert $\widetilde{B}_t$ in Höhe von

$$\widetilde{B}_t := \frac{E_Q[\widetilde{B}_{t+1} + \widetilde{X}_{t+1} - \widetilde{T}_{t+1}|\mathcal{F}_t]}{1 + (1 - \alpha_{t+1}\tau_{t+1}) \cdot r_f}$$

besitzt. Nach Konstruktion haben sowohl die Sachinvestition als auch das Portfolio aus Finanzinvestitionen gleiche Cash–flows nach Steuern. Also sind die Preise der Sachinvestition und des Portfolios aus Finanzinvestitionen aufgrund der Arbitragefreiheit des Kapitalmarktes identisch.

Der Preis dieser Finanzinvestition wird nach Lemma 5 ermittelt. Dabei gilt aber nach Konstruktion des Portfolios aus Finanzinvestitionen

$$E_Q[\widetilde{X}_{t+1} - \tau_{t+1}\widetilde{T}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E_Q\left[\left(1 + (1 - \alpha_{t+1}\tau_{t+1})\right) r_f \widetilde{B}_t - \widetilde{B}_{t+1}|\mathcal{F}_t\right],$$

denn so hatten wir je gerade die Finanzinvestitionen gewählt. Mithin folgt aus Lemma 5 und der Bedingung der Arbitragefreiheit für den Preis der Sachinvestition sofort die Behauptung. ■

3.2 NPV–Gleichung

Es ist möglich, daß sich die Anschaffungsausgabe einer Sachinvestition, die im folgenden mit I_0 bezeichnet wird, vom Marktpreis p^τ unterscheidet. Wir definieren daher den Kapitalwert NPV^τ nach Steuern einer Sachinvestition als Differenz zwischen dem Marktpreis nach Steuern und der Investitionsausgabe, d.h. als

$$\mathrm{NPV}^\tau = -I_0 + p^\tau$$

und entsprechend den Kapitalwert NPV vor Steuern einer Sachinvestition als Differenz zwischen dem Marktpreis vor Steuern und der Investitionsausgabe, d.h. als

$$\mathrm{NPV} = -I_0 + p.$$

Diese Unterscheidung ist ausschließlich für Sachinvestitionen sinnvoll, da für Finanzinvestitionen der Preis nach Steuern mit dem Preis vor Steuern zusammenfällt und folglich der Kapitalwert nach Steuern mit dem Kapitalwert vor Steuern übereinstimmt.

Hauptresultat der Arbeit ist der in Gleichung 20 angegebene Zusammenhang zwischen den Kapitalwerten NPV und NPV^τ, der eine Spezifizierung investitionsneutraler Steuersysteme möglich macht.

Satz 2 (Kapitalwert nach Steuern) *Für den Kapitalwert nach Steuern einer Sachinvestition gilt die Gleichung*

$$\begin{aligned}\mathrm{NPV}^\tau = \mathrm{NPV} - \frac{\tau_1 \cdot \left(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1)\right)}{1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1\tau_1)} \cdot (V_0 - B_0) + \\ + \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\alpha_{t+1}\tau_{t+1}r_f \cdot (1 - \tau_t) + (1 + r_f) \cdot (\tau_t - \tau_{t+1})}{\prod_{k=1}^{t+1} \left(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_k\tau_k)\right)} \cdot E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t|\mathcal{F}_t]. \quad (20)\end{aligned}$$

Beweis. *Wir beginnen mit der Definition der folgenden Zwischensummen*

$$\widetilde{V}_k^\tau := \sum_{t=k}^{T-1} \frac{E_Q[\widetilde{X}_{t+1} \cdot (1 - \tau_{t+1}) + \tau_{t+1}\widetilde{D}_{t+1} + \tau_{t+1} \cdot (1 - \alpha_{t+1})\, r_f \widetilde{B}_t|\mathcal{F}_k]}{\prod_{l=k}^{t+1} \left(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_l\tau_l)\right)}. \quad (21)$$

Die Zwischensumme V_0^τ entspricht dem fairen Preis p^τ. Aus der Definition folgt, daß für die Zwischensummen die Rekursionsbeziehung

$$\widetilde{V}_k^\tau = \frac{E_Q[\widetilde{V}_{k+1}^\tau + \widetilde{X}_{k+1} \cdot (1-\tau_{k+1}) + \tau_{k+1}\widetilde{D}_{k+1} + \tau_{k+1} \cdot (1-\alpha_{k+1})\, r_f \widetilde{B}_k | \mathcal{F}_k]}{1 + r_f \cdot (1 - \alpha_{k+1}\tau_{k+1})} \tag{22}$$

gilt. Wir vergleichen jetzt die Zwischensummen mit Berücksichtigung der Steuer ($\widetilde{V}_k^\tau$) sowie ohne Berücksichtigung der Steuer ($\widetilde{V}_k$). Durch geschicktes Einsetzen der einen Rekursionsbeziehung in die andere läßt sich eine Gleichung für den Preis p^τ in Abhängigkeit von p gewinnen. Dazu gehen zurück zur Gleichung (18). Setzt man sie in Gleichung (22) ein, dann folgt unter Verwendung von Gleichung (2)

$$\begin{aligned}\big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_{k+1}\tau_{k+1})\big)\, \widetilde{V}_k^\tau - (1+r_f) \cdot (1-\tau_{k+1})\, \widetilde{V}_k - \tau_{k+1} \cdot \big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_{k+1})\big)\, \widetilde{B}_k = \\ = E_Q[\widetilde{V}_{k+1} - (1-\tau_{k+1})\, \widetilde{V}_{k+1} - \tau_{k+1}\widetilde{B}_{k+1} | \mathcal{F}_k].\end{aligned}$$

Dies kann man zu folgendem Ausdruck verkürzen

$$\begin{aligned}&\big(\widetilde{V}_k^\tau - (1-\tau_{k+1})\, \widetilde{V}_k - \tau_{k+1}\, \widetilde{B}_k\big) = \\ &= \frac{E_Q[\widetilde{V}_{k+1} - (1-\tau_{k+1}) \cdot \widetilde{V}_{k+1} - \tau_{k+1}\widetilde{B}_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \alpha_{k+1} r_f \tau_{k+1} \cdot (1-\tau_{k+1}) \cdot (\widetilde{B}_k - \widetilde{V}_k)}{1 + r_f \cdot (1-\alpha_{k+1}\tau_{k+1})}.\end{aligned}$$

Jetzt wird umgeformt und der Erwartungswert zum Zeitpunkt $t = 0$ gebildet. Aufgrund des Gesetzes der iterierten Erwartung folgt

$$\begin{aligned}&E_Q[\widetilde{V}_k^\tau - (1-\tau_{k+1})\, \widetilde{V}_k - \tau_{k+1}\widetilde{B}_k | \mathcal{F}_k] = \\ &= \frac{E_Q[\widetilde{V}_{k+1}^\tau - (1-\tau_{k+2})\, \widetilde{V}_{k+1} - \tau_{k+2}\widetilde{B}_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \alpha_{k+1} r_f \tau_{k+1} \cdot (1-\tau_{k+1}) \cdot E_Q[\widetilde{B}_k - \widetilde{V}_k | \mathcal{F}_k]}{1 + r_f \cdot (1-\alpha_{k+1}\tau_{k+1})} + \\ &\quad + \frac{(\tau_{k+1} - \tau_{k+2}) \cdot E_Q[\widetilde{V}_{k+1} - \widetilde{B}_{k+1} | \mathcal{F}_k]}{1 + r_f \cdot (1-\alpha_{k+1}\tau_{k+1})}.\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung erscheint ein Erwartungswert links in eckigen Klammern, der sich ebenfalls rechts, jedoch um eine Zeitperiode verschoben, wiederfindet. Mit Hilfe eines Rekursionsarguments (vollständige Induktion) kann man nun zeigen, daß die Summendarstellung

$$\begin{aligned}&V_0^\tau - (1-\tau_1)\, V_0 - \tau_1 B_0 = \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{r_f \alpha_{t+1}\tau_{t+1}\, (1-\tau_{t+1}) \cdot E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t}{\prod_{k=1}^{t+1} \big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_k\tau_k)\big)} + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\tau_t - \tau_{t+1}) \cdot E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t]}{\prod_{k=1}^{t} \big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_k\tau_k)\big)}\end{aligned}$$

gilt. Der zweite Summand läuft dabei nur von $t = 1$, da in der letzten Rekursionsformel im zweiten Summanden der Zeitindex $k+1$ und nicht k auftaucht. Diese Gleichung kann man, da der Term $V_0 - B_0$ auf beiden Seiten der Gleichung erscheint, umstellen zu

$$\begin{aligned}&V_0^\tau - V_0 + \frac{\tau_1 \cdot \big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_1)\big)}{1 + r_f \cdot (1-\alpha_1\tau_1)} \cdot (V_0 - B_0) = \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(1-\tau_{t+1}) \cdot \alpha_{t+1}\tau_{t+1} r_f + (1 + r_f \cdot (1-\alpha_{t+1}\tau_{t+1})) \cdot (\tau_t - \tau_{t+1})}{\prod_{k=1}^{t+1} \big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_k\tau_k)\big)} \cdot E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t].\end{aligned}$$

Man kann nun den Zähler wie folgt vereinfachen

$$\begin{aligned}(1-\tau_{t+1})\cdot\alpha_{t+1}\tau_{t+1}r_f &+ \big(1+r_f\cdot(1-\alpha_{t+1}\tau_{t+1})\big)\cdot(\tau_t-\tau_{t+1})\\ &= \alpha_{t+1}\cdot\big((1-\tau_{t+1})\cdot\tau_{t+1}r_f-(\tau_t-\tau_{t+1})\cdot\tau_{t+1}r_f\big)+(1+r_f)\cdot(\tau_t-\tau_{t+1})\\ &= \alpha_{t+1}\tau_{t+1}r_f\cdot\big((1-\tau_{t+1})-(\tau_t-\tau_{t+1})\big)+(1+r_f)\cdot(\tau_t-\tau_{t+1})\\ &= \alpha_{t+1}\tau_{t+1}r_f\cdot(1-\tau_t)+(1+r_f)\cdot(\tau_t-\tau_{t+1}).\end{aligned}$$

Jetzt ist zu berücksichtigen, daß die Werte V_0^τ sowie V_0 im Zeitpunkt $t=0$ den entsprechenden Preisen p^τ und p entsprechen. Die gesuchte NPV-Gleichung hat damit die Gestalt

$$\begin{aligned}p^\tau-p=\frac{\tau_1\cdot\big(1+r_f\cdot(1-\alpha_1)\big)}{1+r_f\cdot(1-\alpha_1\tau_1)}\cdot(p-B_0)&+\\ +\sum_{t=1}^{T-1}&\frac{\alpha_{t+1}\tau_{t+1}r_f\cdot(1-\tau_t)+(1+r_f)\cdot(\tau_t-\tau_{t+1})}{\prod_{k=1}^{t+1}\big(1+r_f\cdot(1-\alpha_k\tau_k)\big)}\cdot E_Q[\widetilde{V}_t-\widetilde{B}_t].\end{aligned}$$

Nach Subtraktion der Anschaffungsausgabe I_0 ist das die Aussage des Satzes. ■

3.3 Klassifikation investitionsneutraler Steuersysteme

Wir können nun einzelne investitionsneutrale Steuersysteme identifizieren.

Satz 3 (Investitionsneutrale Steuersysteme) *Für sämtliche investitionsneutralen Steuersysteme, die im betrachteten Modell abgeleitet werden können, muß mindestens eine der Gleichungen*

$$\alpha_{t+1}=\frac{1+r_f}{r_f}\cdot\frac{\tau_{t+1}-\tau_t}{\tau_{t+1}\cdot(1-\tau_t)} \tag{23}$$

und

$$E_Q[\widetilde{B}_t]=E_Q[\widetilde{V}_t] \tag{24}$$

gelten. Niveauinvariante Steuersysteme müssen zusätzlich mindestens eine der Gleichungen

$$\alpha_1=\frac{1+r_f}{r_f} \tag{25}$$

und

$$B_0=p \tag{26}$$

erfüllen, wohingegen nicht-niveauinvariante Steuersysteme stattdessen zusätzlich die Gleichung

$$B_0=I_0 \tag{27}$$

erfüllen müssen.

Beweis. *Ausgangspunkt ist die in Satz 2 hergeleitete NPV-Gleichung (20). Gemäß der zugrundegelegten Definition von Investitionsneutralität sind Bedingungen für die Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ sowie die Buchwerte $B_0, \widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_T$ zu finden, so daß die Gleichung (20) die Form*

$$\mathrm{NPV}^\tau = (1-z)\cdot \mathrm{NPV} \quad \textit{mit} \;\; 1-z \geq 0 \tag{28}$$

annimmt. Zur Vereinfachung der Notation wird Gleichung (20) in der Form

$$\mathrm{NPV}^\tau = \mathrm{NPV} - c_0 \cdot (V_0 - B_0) + \sum_{t=1}^{T-1} c_t \cdot E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t] \tag{29}$$

mit

$$c_0 = \frac{\tau_1 \cdot \big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_1)\big)}{1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1 \tau_1)} \quad \textit{und} \quad c_t = \frac{\alpha_{t+1}\tau_{t+1} r_f \cdot (1-\tau_t) + (1+r_f)\cdot(\tau_t - \tau_{t+1})}{\prod_{k=1}^{t+1}\big(1 + r_f \cdot (1-\alpha_k \tau_k)\big)}$$

für alle $t = 1, \ldots, T-1$ dargestellt. Da die Gleichung (28) kein Absolutglied enthält und die α's nach Annahme projektunabhängig sind, kann Gleichung (29) nur dann die Form (28) annehmen, wenn der letzte Summand verschwindet, d.h. wenn

$$\sum_{t=1}^{T-1} c_t \cdot E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t] = 0 \tag{30}$$

gilt. Diese Gleichung ist speziell dann erfüllt, wenn jeder einzelne Summand gleich null ist. Dafür ist zu fordern, daß an jedem Zeitpunkt t entweder

$$c_t = 0 \tag{31}$$

oder

$$E_Q[\widetilde{V}_t - \widetilde{B}_t] = 0 \tag{32}$$

ist. Während sich aus Gleichung (31) eine Bedingung für die Parameter α_2 bis α_T ableiten läßt, läßt sich aus Gleichung (32) eine Bedingung für die erwarteten Buchwerte $E_Q[\widetilde{B}_1], \ldots, E_Q[\widetilde{B}_T]$ ableiten. Anhand von Gleichung (31) kommt man auf

$$\alpha_{t+1} = \frac{1+r_f}{r_f} \cdot \frac{\tau_{t+1} - \tau_t}{\tau_{t+1}\cdot(1-\tau_t)}$$

für die Parameter $\alpha_2, \ldots, \alpha_T$, und aus Gleichung (32) folgt

$$E_Q[\widetilde{B}_t] = E_Q[\widetilde{V}_t]$$

als Bedingung für die erwarteten Buchwerte. Alles in allem ist Gleichung (30) also dann gültig, wenn in jedem Zeitpunkt $t = 1, \ldots, T-1$ mindestens eine der beiden Gleichungen (23) und (24) erfüllt ist. Diese Bedingung ist an sämtliche investitionsneutralen Steuersysteme zu stellen, die im vorliegenden Modell abgeleitet werden können. Unter dieser Bedingung vereinfacht sich Gleichung (28) zu

$$\mathrm{NPV}^\tau = \mathrm{NPV} - c_0 \cdot (V_0 - B_0),$$

wofür man wegen $V_0 = p$ auch

$$\mathrm{NPV}^\tau = \mathrm{NPV} - c_0 \cdot (p - B_0) \tag{33}$$

schreiben kann.

Niveauinvariante Steuersysteme. *Aus Gleichung (33) ist ersichtlich, daß für alle niveauinvarianten Steuersysteme die Bedingung*

$$c_0 \cdot (p - B_0) = 0 \tag{34}$$

gelten muß. Mit dieser Gleichung ist ähnlich zu verfahren wie mit Gleichung (30). Es muß hier

$$c_0 = 0 \tag{35}$$

oder

$$p - B_0 = 0 \tag{36}$$

gegeben sein, woraus sich Anforderungen an den Parameter α_1 sowie den Buchwert B_0 ergeben. Gleichung (35) wird gelöst durch

$$\alpha_1 = \frac{1 + r_f}{r_f},$$

und Gleichung (36) impliziert trivialerweise die Bedingung

$$B_0 = p.$$

Gleichung (34) ist daher dann erfüllt, wenn mindestens eine der Gleichungen (25) und (26) erfüllt ist. Damit sind sämtliche Steuersysteme niveauinvariant, die den folgenden beiden Anforderungen genügen:

- *Es gilt für alle $t = 1, \dots, T$ mindestens eine der Bedingungen (23) und (24).*
- *Es gilt mindestens eine der Bedingungen (25) und (26).*

Sonstige investitionsneutrale Steuersysteme. *Alle investitionsneutralen Steuersysteme, die nicht niveauinvariant sind, müssen laut Gleichung (33) der Bedingung*

$$c_0 \cdot (-B_0 + p) = z \cdot \mathrm{NPV}$$

genügen. Die Lösung dieser Gleichung verläuft hingegen anders als die Lösung der Gleichungen (30) und (34). Offensichtlich sind aus ihr dieselben Größen wie aus Gleichung (34) zu bestimmen, nämlich α_1 und B_0. Da α_1 – wie auch $\alpha_2, \dots, \alpha_T$ – projektunabhängig sein soll, muß der NPV *aus Gleichung (34) verschwinden. Das wiederum kann nur geschehen durch geeignete Wahl von B_0. Es muß dafür*

$$p - B_0 = \mathrm{NPV}$$

gelten, und das zieht

$$B_0 = I_0$$

nach sich. Dann vereinfacht sich Gleichung (34) zu

$$c_0 = \frac{\tau_1 \cdot \big(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1)\big)}{1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1 \tau_1)} = z.$$

Alle investitionsneutralen Steuersysteme, die nicht niveauinvariant sind, sind also durch folgende zwei Bedingungen charakterisiert:

Gleichung (23)	Gleichung (24)	Gleichung (25)	Gleichung (26)	Gleichung (27)
niveauinvariante Steuersysteme				
×	×	×	×	–
×	×	×	–	–
×	×	–	×	–
×	–	×	×	–
–	×	×	×	–
×	–	×	–	–
×	–	–	×	–
–	×	×	–	–
–	×	–	×	–
nicht-niveauinvariante Steuersysteme				
×	×	–	–	×
×	–	–	–	×
–	×	–	–	×

Tabelle 1: Zusammenfassung aller investitionsneutralen Steuersysteme

- *Es gilt mindestens eine der Bedingungen (23) und (24).*
- *Es gilt Gleichung (27).*

Eine tabellarische Übersicht über alle in Satz 3 hergeleiteten Steuersysteme findet sich in Tabelle 1.

■

Aus Gleichung (23) ist ersichtlich, daß der Abzugsparameter α unter Umständen auch negativ – dann kommt es nicht zu einem Abzug, sondern einer Addition der Eigenkapitalzinsen in der Bemessungsgrundlage. Ob einer dieser Fälle eintritt oder nicht, hängt im wesentlichen von der Variation der Steuersätze und dem risikolosen Zins ab.

3.4 Diskussion der investitionsneutralen Steuersysteme und Ableitung von Spezialfällen

Sowohl in der Klasse der niveauinvarianten als auch in der Klasse der nicht-niveauinvarianten Steuersysteme finden sich interessante Spezialfälle wieder.

Spezialfall der niveauinvarianten Steuersysteme. Das aus dem Fall bei Sicherheit bekannte System der Besteuerung des ökonomischen Gewinns läßt sich auf den Fall bei Unsicherheit übertragen. Während das System bei Sicherheit durch die Bedingungen $B_0 = p$ und

$B_t = V_t$ für alle $t = 1, \dots, n$ gekennzeichnet ist, ist es bei Unsicherheit durch die Bedingungen $B_0 = p$ (Gleichung (26)) und $E_Q[B_t] = E_Q[V_t]$ für alle $t = 1, \dots, n$ (Gleichung (24)) gekennzeichnet, d.h. die Gleichheit von Wert und Buchwert einer Investition ist nur noch im Erwartungswert gegeben. Um diese Bedingung zu interpretieren, stellen wir die Definitionsgleichung etwas um:

$$\frac{E_Q[\widetilde{B}_t]}{\prod_{k=1}^{t}(1 + r_f(1 - \alpha_k \tau_k))} = \frac{E_Q[\widetilde{V}_t]}{\prod_{k=1}^{t}(1 + r_f(1 - \alpha_k \tau_k))}$$

$\widetilde{V}_t$ ist der *zukünftige* (und damit auch unsichere) Wert des Portfolios im Zeitpunkt $t \geq 0$, wenn Steuern vernachlässigt werden. Nach den bisherigen Aussagen zum äquivalenten Martingalmaß beschreibt dann die rechte Seite den *heutigen* Wert eines Portfolios im Zeitpunkt t. Ebenso ist $\widetilde{B}_t$ der *zukünftige* (und ebenfalls unsichere) Buchwert eines Portfolios im Zeitpunkt t. Nach Diskontierung erhalten wir den *heutigen* Wert eines Portfolios im Zeitpunkt t, das den Buchwert $\widetilde{B}_t$ im Zeitpunkt t auszahlen würde. Zusammengefaßt kann man also folgendes aussagen: Bei der Besteuerung des ökonomischen Gewinns unter Unsicherheit müssen der *heutige* Wert des Portfolios (ohne Steuern) im Zeitpunkt t und der *heutige* Buchwert des Portfolios im Zeitpunkt t übereinstimmen.

Man erkennt an der Konstruktion dieses Steuersystems, daß bei beliebiger Wahl der Buchwerte der Portfolios die Besteuerung des ökonomischen Gewinns zu einem niveauinvarianten Steuersystem führt.

Spezialfall der nicht-niveauinvarianten Steuersysteme. In der Klasse der nicht-niveauinvarianten Steuersysteme ist α_1 frei wählbar. Ein besonders einfaches Steuersystem stellt sich im Fall $z = \tau_t$ ein, d.h. wenn z einem der Steuersätze $\tau_0, \dots, \tau_T$ gleicht. Das ist gegeben bei spezieller Festsetzung von α_1. Hierzu ist die Gleichung

$$\frac{\tau_1 \cdot \big(1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1)\big)}{1 + r_f \cdot (1 - \alpha_1 \tau_1)} = \tau_t$$

nach α_1 umzustellen. Man erhält

$$\alpha_1 = \frac{1 + r_f}{r_f} \cdot \frac{\tau_1 - \tau_t}{\tau_1 \cdot (1 - \tau_t)}.$$

Wird α_1 gemäß dieser Vorschrift gewählt, ergibt sich für den NPV nach Steuern schließlich

$$\mathrm{NPV}^{\tau} = (1 - \tau_t) \cdot \mathrm{NPV}.$$

4 Schlußbetrachtung

Die vorliegende Arbeit stellt einen ersten Schritt dar in der Erarbeitung eines Modells, das es aufgrund seiner Allgemeinheit erlaubt, mehrere Klassen von Steuersystemen zu spezifizieren, die sich *bei Unsicherheit* als investitionsneutral erweisen. Folgende Modellerweiterungen sind denkbar:

- Unsicherheit bezüglich des Steuersatzes τ_t und des Parameters α.
- Untersuchung in einem zeitstetigen Modell.
- Untersuchung für unvollständige Kapitalmärkte.

Es bleibt abzuwarten, wie sich die Resultate dieser Arbeit unter diesen möglichen Modellerweiterungen verändern.

Literatur

Back, K. & Pliska, S. (1991). On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space, *Journal of Mathematical Economics* **20**: 1–18.

Boadway, R. & Bruce, N. (1984). A general proposition on the design of a neutral business tax, *Journal of Public Economics* **24**: 231–239.

Brown, E. (1948). Business–income and investment incentives. Essays in honor of Alvin Hansen, *in* L. Metzler (ed.), *Income, Employment and Public Policy*, pp. 300–316.

Harrison, J. & Kreps, D. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory* **20**: 381–408.

Irle, A. (1998). *Finanzmathematik*, B.G. Teubner, Stuttgart.

Johansson, S.-E. (1969). Income taxes and investment decisions, *Swedish Journal of Economics* **71**: 104–110.

König, R. (1997). Ungelöste Probleme einer investitionsneutralen Besteuerung – Gemeinsame Wurzeln unterschiedlicher neutraler Steuersysteme und die Berücksichtigung unsicherer Erwartungen, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* **49**: 42–63.

Kruschwitz, L. (1998a). *Finanzierung und Investition*, 2nd edn, Oldenbourg, München.

Kruschwitz, L. (1998b). *Investitionsrechnung*, 7 edn, Oldenbourg, München, Wien.

Löffler, A. (1999). Investitionsneutrale Steuersysteme bei zeitlich veränderbaren Steuersätzen. unpublished, Berlin. see http://www.wiwiss.fu-berlin.de/w3/w3krusch/pub/tax.htm.

Preinreich, G. (1951). Models of taxation in the theory of the firm, *Economia Internazionale* **4**: 372–397.

Samuelson, P. (1964). Tax deductablity of economic depreciation to insure invariant valuations, *Journal of Political Economy* **72**: 604–606.

Siegel, T. & Bareis, P. (1999). *Strukturen der Besteuerung*, 3rd edn, Oldenbourg, München.

Wenger, E. (1983). Gleichmäßigkeit der Besteuerung von Arbeits– und Vermögenseinkünften, *Finanzarchiv* **41**: 207–252.